ORSAY
N° d'Ordre : 501

THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR-INGENIEUR

Spécialité : ANALYSE NUMERIQUE ET OPTIMISATION

par

Jean-Louis MONTAGNE

UNE APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS MIXTES AU CALCUL BIDIMENSIONNEL D'UN FLUIDE DIPHASIQUE

Soutenue le 24 septembre 1981, devant la Commission d'Examen

M.	TEMAM	Président
MM.	NEDELEC	
	KAVENOKY	Examinateurs
	TARTAR	

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547316_0004

ORSAY
N° d'Ordre : 501

THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR-INGENIEUR

Spécialité : ANALYSE NUMERIQUE ET OPTIMISATION

par

Jean-Louis MONTAGNE

UNE APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS MIXTES AU CALCUL BIDIMENSIONNEL D'UN FLUIDE DIPHASIQUE

Soutenue le 24 septembre 1981, devant la Commission d'Examen

M.	TEMAM	Président
MM.	NEDELEC	
	KAVENOKY	Examinateurs
	TARTAR	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

REMERCIEMENTS

Monsieur TEMAM a bien voulu présider ce Jury, je l'en remercie respectueusement.

Je remercie très sincèrement Monsieur KAVENOKY, chef de la Section de Physique mathématique, qui a facilité la poursuite de ce travail au sein de son équipe.

Je tiens également à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur NEDELEC, qui s'est intéressé à ce travail et m'a guidé de ses conseils.

Monsieur TARTAR a accepté de participer à ce Jury et je lui adresse mes sincères remerciements.

Je remercie également tous les ingénieurs de la S.P.M. pour l'environnement scientifique de qualité qu'ils ont procuré et la bonne entente qui règne dans l'équipe.

Je remercie enfin les personnes qui ont concouru à la présentation de cette thèse.

S O M M A I R E

INTRODUCTION -

I - GENERALITES -

a) le modèle homogène équilibré
b) les équations du modèle homogène
c) invariants du système

II - DESCRIPTION DES ESPACES DE FONCTIONS UTILISES -

a) utilité des discontinuités pour le traitement de l'équation de convection linéaire
b) traitement de l'équation d'onde linéaire
c) description des éléments finis utilisés

Annexes :

a) notations
b) démonstration des propriétés de variation bornée

III - LE PROBLEME DISCRITISE -

a) discrétisation des équations - le schéma semi implicite
b) relation de stabilité sur l'énergie totale
c) le problème linéarisé : conditions de consitence et stabilité

IV - ETUDE DE L'ENTROPIE DU SYSTEME -

a) généralité
b) l'entropie fonction d'état
c) cas stationnaire

V - DESCRIPTION DU CODE -

a) description générale
b) algorithme de résolution
c) mise en oeuvre des éléments finis
d) calcul des seconds membres
e) les équations en coordonnées cylindriques

VI - TESTS NUMERIQUES -

A) tests analytiques

- tube à choc
- écoulement concentrique

B) tests globaux

- remplissage d'un downcomer
- écoulement le long d'une paroi chauffante

BIBLIOGRAPHIE -

INTRODUCTION

Le programme présenté est une application d'une méthode d'éléments finis mixtes à des écoulements instationnaires diphasiques eau-vapeur dans le circuit d'un réacteur nucléaire en dimension 2.

Le problème des écoulements diphasiques a été réduit, en faisant l'hypothèse d'un fluide homogène, à l'étude d'un écoulement à un seul fluide, fortement compressible. Il faut donc appliquer une méthode de discrétisation à la résolution d'un système d'équations d'Euler, dans un domaine Ω formé de frontières ouvertes. Il comporte une entrée et une sortie :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{u} = 0 \text{ sur } \Omega$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{u} \times \vec{u}) + \vec{\nabla} p = \vec{F} \text{ sur } \Omega$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h - P) \operatorname{div}(\rho \vec{u} h) - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p = \emptyset \text{ sur } \Omega$$

$u = \vec{u}_o$ sur $\partial_e \Omega$: entrée $P = P_o$ sur $\partial_s \Omega$: sortie

$h = h_o$ sur $\partial_e \Omega$

$\rho = f(P,h)$

Pour fixer le cadre dans lequel se fait cette étude, il faut rappeler que les écoulements dans les canalisations restent subsoniques, ou bloqués en sortie sur une vitesse du son donnée ici par le modèle homogène. D'autre part, l'écoulement sera le siège de nombreux phénomènes irréversibles tels que le frottement et les apports de chaleur. La discrétisation doit permettre de les prendre en compte facilement.

La complexité d'un tel système n'a pas permis de donner de résultat d'existence ou de régularité de la solution. Ce sont plutôt des arguments qui sont mis en avant pour le choix de la discrétisation. Les solutions sont cherchées dans l'ensemble des fonctions de R^2 à variations bornées. Le caractère hyperbolique des équations, et l'importance des relations entre les quantités thermodynamiques, suggèrent l'utilisation d'éléments discontinus pour ces variables. Les quantités de mouvement et les vitesses ont été discritisées dans un espace plus régulier, $H(\operatorname{div},\Omega)$, les vecteurs dont les composantes appartiennent à $L^2(\Omega)$ ainsi que la divergence. ($L^2(\Omega)$ est défini comme l'ensemble des fonctions à valeur dans R, de carré sommable dans Ω). C'est donc une famille d'éléments mixtes qui a été utilisée dans la discrétisation spatiale.

On rappelle donc, en premier, les propriétés de ces éléments mixtes, en particulier la correspondance qui existe entre les variables scalaires et vectorielles, ainsi que les résultats d'approximation. Ces éléments ont été introduits pour les problèmes elliptiques avec multiplicateurs de Lagrange [7 - 8 - 17]. Ils ont aussi été utilisés pour les calculs d'écoulements de fluides incompressibles, en montrant le bénéfice des discontinuités pour stabiliser le schéma [11 - 12 - 13].

Ensuite, nous présenterons l'application de ces éléments, telle qu'elle a été faite pour le problème, avec ses conséquences sur la précision et la stabilité des calculs. Le problème de l'évolution en temps a été traité par des différences finies du premier ordre. On présente ici un schéma semi-implicite dont la résolution est relativement facile. On peut étudier ses propriétés sur un système simplifié linéarisé, qui approximerait un écoulement isentropique.

Le système des équations d'Euler est non linéaire, il convient donc de vérifier qu'on obtient une solution physique. Après un rappel de résultats généraux, on décrit les propriétés vérifiées par le système discrétisé. En particulier, on peut dire que la discrétisation proposée de l'équation d'énergie assure une augmentation de l'entropie dans le sens du courant. D'autre part, dans le cadre des écoulements subsoniques une seule solution est stable.

On présente ensuite, la méthode de résolution utilisée pour le schéma semi-implicite. On utilise le fait que dans cette approximation, l'état au temps n+1 peut être décrit par les valeurs d'une seule variable scalaire. Ici, c'est la pression qui a été utilisée comme variable de commande. Les différentes solutions techniques utilisées pour l'aboutissement des calculs sont également décrites.

Enfin, les tests numériques sont importants, puisqu'ils permettent d'étudier les propriétés d'un schéma dont la théorie n'est pas tout à fait établie. Deux tests ont été faits avec les équations d'état d'un gaz parfait, permettant de comparer les résultats du calcul avec la résolution théorique. En particulier à une dimension, le problème du tube à choc, qui a déjà été amplement étudié avec des schémas explicites (24-25) permet de se faire une idée du comportement de la méthode. On trouve que le schéma semi-implicite n'est pas monotone et produit des oscillations au passage de fortes discontinuités. Le traitement totalement implicite des équations, par contre permet de retrouver une solution monotone. Ensuite deux essais plus globaux utilisant l'équation d'état de l'eau en modèle diphasique homogène équilibré, mettent en évidence la possibilité d'application de la méthode à des cas concrets, où l'on introduit des seconds membres dans les équations.

I - GENERALITES

A) Le modèle homogène équilibré

B) Les équations du modèle homogène

C) Invariants du système

Le programme est conçu pour être appliqué à des calculs d'écoulements diphasiques eau-vapeur, dans des composants d'un réacteur nucléaire. Pour étudier les problèmes posés par l'application des éléments finis, nous nous sommes limités au cas le plus simple, le modèle homogène équilibré. Nous rappellerons donc brièvement, les hypothèses de ce modèle.

A - *LE MODELE HOMOGENE EQUILIBRE* -

Un fluide diphasique, formé du liquide et de la vapeur d'un même corps est caractérisé par la présence côte à côte de deux phases qui intéragissent fortement. Ils existent entre elles, des transferts de maase, des transferts de quantité de mouvement et des transferts d'énergie interne.

La représentation la plus communément admise dans la littérature par ceux qui font des calculs est la représentation par valeurs moyennes. Sur un volume V, on définit une valeur moyenne $\overline{\rho}$ d'une quantité ρ, par $\overline{\rho} = \int_V \rho \, dx \times \frac{1}{V}$. On admet que l'on peut ainsi définir la valeur moyenne $\overline{\rho}(x)$ autour d'un point x, en faisant tendre le volume V qui entoure le point x vers zéro. Ce faisant, on introduit la notion de taux de présence d'une phase α pour la vapeur, $(1-\alpha)$ pour le liquide. Le taux de présence dans un volume est la fraction de volume occupée par la phase, pour un point, cela peut être interprété comme la probabilité de trouver cette phase en ce point. α, le taux de présence de la vapeur, est communément appelé taux de vide dans le cas des écoulements diphasiques.

L'hypothèse du modèle homogène équilibré se situe à ce niveau :

L'hypothèse "homogène", indique que le mélange est isotrope en espace. On peut donc définir des grandeurs moyennes pour le mélange et les relier à celles transportées par chacunedes phases par l'intermédiaire du taux de présence. De plus l'hypothèse d'isotropie implique que les vitesses des deux fluides sont égales.

Ainsi pour la masse volumique :

Si $\overline{\rho}V$ est la densité moyenne de la vapeur, $\overline{\rho}l$ la densité moyenne du liquide, α le taux de vide : la densité de mélange est :

$$\overline{\rho} = \alpha\, \overline{\rho}_V + (1-\alpha)\, \overline{\rho}_l$$

de même, pour l'énergie interne $\overline{\rho_V e_V} = \overline{\rho}_V\, \overline{e}_V$ énergie de la vapeur, $\overline{\rho}_l\, \overline{e}_l$ énergie du liquide. L'énergie moyenne du mélange est :

$$\overline{\rho e} = \overline{\rho}\, \overline{e} = \alpha\, \overline{\rho_V e_V} + (1-\alpha)\, \overline{\rho_l e_l}$$

La vitesse moyenne est la même : $\overline{u} = \overline{u}_V = \overline{u}_l$.

La quantité du mouvement moyenne est donc :

$$\overline{\rho}\, \overline{u} = \alpha\, \overline{\rho_V}\, \overline{u} + (1-\alpha)\, \overline{\rho}_l\, \overline{u}$$

L'hypothèse "équilibrée", nous place dans le cadre de la thermodynamique des systèmes à l'équilibre. On suppose que les constantes de temps des transferts entre les deux phases sont suffisamment petites pour que dans un petit volume les deux phases en présence soient à l'équilibre. On peut ainsi définir localement une pression et une température qui seront les mêmes pour les deux phases. De plus les différentes fonctions d'état des deux phases suivent les courbes des propriétés à saturation.

La propriété principale de cette hypothèse est qu'elle relie directement le taux de présence d'une phase à la pression moyenne et à l'énergie interne du mélange par l'intermédiaire des propriétés à saturation des deux phases.

En effet, à saturation les densités sont des fonctions de la pression uniquement. On peut écrire :

$$\overline{\rho}_V = \rho_{Vs}(\overline{p}), \quad \overline{\rho_l} = \rho_{ls}(\overline{p})$$

et

$$\overline{e}_V = e_{Vs}(\overline{p}), \quad \overline{e}_l = e_{ls}(\overline{p})$$

Les relations moyennes donnent :

$\overline{P}$ est la pression moyenne

$$\overline{\rho} = \alpha\, \rho_{Vs}(\overline{p}) + (1-\alpha)\rho_{ls}(\overline{p})$$

$$\overline{\rho}\, \overline{e} = \alpha\, \rho_{Vs}(\overline{p}).\, e_{Vs}(\overline{p}) + (1-\alpha)\, \rho_{ls}(\overline{p}).e_{ls}(\overline{p})$$

On peut très facilement éliminer α de ces relations et obtenir une relation entre $\overline{\rho}$, $\overline{p}$, $\overline{e}$. Pour le modèle homogène équilibré, on peut ainsi écrire une fonction d'état du mélange sous la forme :

$$\overline{\rho} = f(\overline{p},\overline{e})$$

Dans la suite, on utilisera plus fréquemment la fonction enthalpie, à la place de l'énergie interne. L'enthalpie h est définie par h : $h = e + p/\rho$. L'enthalpie s'introduit naturellement dans les équations. Elle mesure l'apport de chaleur à pression constante. L'équation d'état obtenue avec l'enthalpie se met sous la forme :

$$\overline{\rho} = f(\overline{p},\overline{h}) = \frac{\rho_{ls}(\overline{p}) \times \rho_{Vs}(\overline{p}) \times \left[h_{Vs}(\overline{p}) - h_{\ell s}(\overline{p}) \right]}{\rho_{ls}(\overline{p}) \times \left[\overline{h} - h_{ls}(\overline{p}) \right] + \rho_{Vs}(\overline{p}) \times \left[h_{Vs}(\overline{p}) - \overline{h} \right]}$$

On vérifie que la densité $\overline{\rho}$ est bien une fonction continue de $\overline{h}$ à pression constante. Elle varie entre la densité du liquide et la densité de la vapeur à saturation.

Le modèle homogène a déjà été utilisé dans une vaste gamme d'écoulements où les variations spatio-temporelles sont suffisamment lentes.

Limites d'application du modèle homogène équilibré -

Ce modèle est bien pratique, d'autre part la vapeur et le liquide sont si fortement liés qu'on peut penser qu'il reste valable dans la plupart des cas. Cependant afin d'en cerner les limites on peut citer deux exemples où il est pris en défaut.

1°) un écoulement de bulles sous l'effet de la pesanteur. Par la poussée d'Archimède, les bulles montent alors que le liquide reste sur place. Le modèle homogène donne une vitesse moyenne et n'est pas capable de traduire le phénomène de transfert de matière du bas vers le haut

2°) une dépressurisation brusque. Les expérimentations placées dans ce genre d'expérience donnent souvent une courbe d'évolution de la température et une courbe d'évolution de la pression en un point. En certains points, la courbe de température, reste un certain temps au-dessus de la température de saturation donnée par la pression. Ceci est la preuve de la présence de bulles de vapeur non en équilibre avec l'eau environnante.

B - *LES EQUATIONS DU MODELE HOMOGENE* -

A partir d'ici on considère les valeurs moyennes des fonctions comme les fonctions en ces points. D'un point de vue formel, le fluide dans le cadre du modèle homogène équilibré, est un fluide compressible dont l'écoulement est régi par une équation d'état, une équation de continuité

une équation de conservation de quantité de mouvement, et une équation de conservation d'énergie.

1°) *Equation d'état* -

Elle lie en un point, la densité, la pression et l'enthalpie du fluide. On a vu[1] qu'on peut la mettre sous la forme :

$$\rho = f(P,h)$$

Les propriétés de cette fonction d'état sont très importantes pour l'étude du système. Pour les fluides compressibles on est amené à introduire la fonction thermohydraulique entropie S, et la vitesse du son c.

L'entropie est une variable thermodynamique dont les variations mesurent le degré d'"irréversibilité" d'une transformation. Il existe une relation fondamentale liant les variations de S à celles des autres grandeurs.thermodynamiques.

$$T\,dS = dh - \frac{dP}{\rho} \quad \text{où T est la température absolue du système} \qquad (2)$$

La vitesse du son e mesure la vitesse propagation des informations dans le fluide par des phénomènes réversibles. Si $\tau = 1/\rho$ est le volume massique, on trouve que c est égale à $\sqrt{-\left(\frac{\partial P}{\partial \tau}\right)_{S=cte}}$ donc également $\frac{1}{c^2} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{S=cte}$. La quantité $\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{S=cte}$ s'obtient facilement à partir des tables de fonction d'état.

D'autre part $\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{S=cte}$ peut s'exprimer en fonction des dérivées partielles de ρ en fonction de P et h. A entropie constante on a la relation $dh - \frac{dP}{\rho} = 0$. Donc :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{S=cte} = \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{S=cte} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial h}\right)_{p=cte} \right] \qquad (3)$$

Une des propriétés des fluides monophasiques est l'existence effective d'une vitesse de son réelle, $\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{S=cte}$ est positive. La densité est une fonction croissante de la pression. On verra plus loin que cette condition permet d'obtenir des systèmes bien posés pour les équations d'évolution. D'autre part pour un fluide monophasique $\left(\frac{\partial P}{\partial \tau}\right)_{S=cte}$, est une fonction croissante de τ (La courbe $P=f(\tau)$ a une allure hyperbolique). Cette propriété a son importance dans la recherche d'une solution unique (chapitre IV).

Les hypothèses du fluide homogène équilibré permettent de définir l'entropie du mélange par la relation (2). On peut calculer la dérivée $\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{S=cte}$ par l'expression (2) en éliminant dans le système suivant :

$$
\begin{cases}
d\rho = \left[\alpha \dfrac{\partial \rho_{Vs}}{\partial p} + (1-\alpha) \dfrac{\partial \rho_{ls}}{\partial p} \right] \times dP + \left[\rho_{Vs}(p) - \rho_{ls}(p) \right] d\alpha \\
\rho\, dh + h\, d\rho = \left[\alpha \dfrac{\partial}{\partial p} \left[\rho_{Vs} \cdot h_{Vs} \right] + (1-\alpha) \dfrac{\partial}{\partial p} \left[\rho_{/s} - h_{/s} \right] \right] dP \\
\qquad + \left[\rho_{Vs} \cdot h_{Vs} - \rho_{ls} \cdot h_{ls} \right] d\alpha \\
dh = \dfrac{dP}{\rho}
\end{cases}
$$

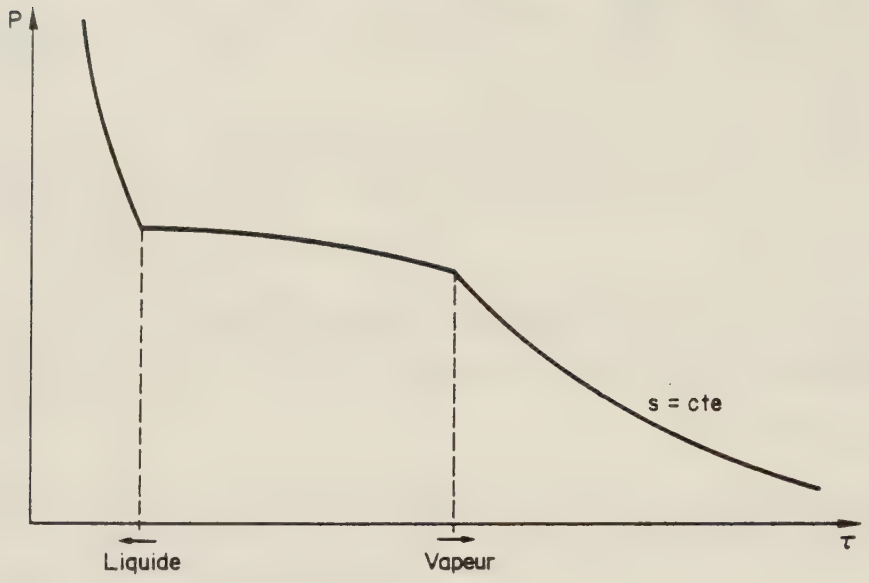
On trouve :

$$
\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{S=cte} = \alpha \frac{\rho}{\rho_{ls}(p)} \cdot \frac{\partial \rho_{Vs}}{\partial p} + (1-\alpha) \frac{\rho}{\rho_{Vs}(p)} \cdot \frac{\partial \rho_{ls}}{\partial p} - \frac{1}{\Delta M} \rho \cdot \left(\frac{1}{\rho_{Vs}(p)} - \frac{1}{\rho_{ls}(p)} \right) \times
$$

$$
\left[1 - \alpha \rho_{Vs}(p) \frac{\partial h_{Vs}}{\partial p} - (1-\alpha) \rho_{/s}(p) \frac{\partial h_{ls}}{\partial p} \right]
$$

Si $\Delta M = h_{Vs}(p) - h_{ls}(p)$, est le saut d'entropie entre les deux phases, si on se place loin du point triple, les termes divisés par ΔM sont des termes correctifs. D'autre part $\frac{\partial \rho_{Vs}(p)}{\partial p}$ et $\frac{\partial \rho_{ls}(p)}{\partial p}$ sont positifs et multipliés par le rapport $\rho/\rho_{Vs}(p)$. On trouve que $\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{S=cte}$ est beaucoup plus grand que dans le liquide ou la vapeur. Son maximum se situe près de la phase liquide et il est multiplié par le rapport $\rho_{ls}(p)/\rho_{Vs}(p)$. D'autre part ces valeurs ne se raccordent pas à celles calculées dans le cas d'une phase seule. A titre d'exemple, à une pression de 10 bars, la vitesse du son est d'environ 300 m/s dans la vapeur, 1500 m/s dans le liquide et seulement 15 m/s dans le mélange homogène.

De cela, on peut conclure, que l'on peut calculer une vitesse du son dans le fluide diphasique homogène. La densité est bien une fonction croissante de la pression à entropie constante. Par contre si on étudie la courbe P fonction de τ, la dérivée $\frac{\partial p}{\partial \tau}$ n'est pas une fonction croissante de τ, la courbe n'est pas convexe.



2°) *Equations décrivant l'ecoulement du fluide* -

De façon habituelle les équations déterminant l'écoulement d'un fluide monovariant sont décrites par les trois principes suivant : principe de la conservation de masse, principe de la conservation de quantité de mouvement, principe de conservation de l'énergie totale. On pourra trouver l'établissement rigoureux de ces équations dans le cadre de la mécanique des milieux continus dans le cours de Mr. CARRIERE [2] ou dans le cours de MM. C. FRANCOIS et DARROZES [1] .Nous donnons ici le système obtenu des équations d'évolution :

- équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\vec{u} = 0$$

- équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \rho\vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla}.\rho\vec{u} \times \vec{u} = \operatorname{div} \bar{\bar{T}} + \vec{F}_i + \vec{F}_x$$

- équation de conservation de l'énergie totale (énergie interne + énergie cinétique)

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} (E.\vec{u}) = \operatorname{div} (\bar{\bar{T}}.\vec{u}) + \vec{F}_i.\vec{u}$$

où ρ est la densité, $\vec{u}$ la vitesse, e est l'énergie interne massique, et E est égale à $\rho e + \frac{1}{2} \rho \vec{u}^2$.

$\bar{\bar{T}}$ est le tenseur des contraintes. Il est habituel faute de mieux dans les calculs de donner à $\bar{\bar{T}}$ la forme obtenue dans le cadre des fluides monovariants.

Le cadre des fluides monovariants

$$\bar{\bar{T}} = (-p + \lambda \, \mathrm{Div} \, \vec{u}) \, I + 2\mu \, \bar{\bar{\varepsilon}}$$

où p est la pression locale

λ et u sont les deux coefficients de Lamé

$\bar{\bar{\varepsilon}}$ est le tenseur des déformations

Dans la suite, on a cherché à obtenir un schéma numérique stable sans terme du second ordre. C'est pourquoi les coefficients de viscosité sont négligés. D'autre part, dans les écoulements considérés, il faudra tenir compte d'une modélisation du frottement du fluide sur un substrat présent à l'intérieur du domaine.

Enfin dans l'équation de quantité de mouvement deux forces de volume apparaissent $\vec{F}_i$ et $\vec{F}_x$. Dans notre cas il faut distinguer entre deux forces. Les forces $\vec{F}_i$ principalement représentées par la gravité se déplacent avec le fluide, elles apportent un travail dans l'équation de conservation d'énergie. Les forces $\vec{F}_x$ modélisent les forces de frottement sur le substrat, elles ne travaillent pas.

La quantité d'énergie apportée par ces forces sera en général négligeable devant les flux de chaleurs apportés au fluide. Donc ces forces si elles apparaissent dans l'équation de quantité de mouvement seront négligées dans l'équation de la chaleur. Enfin on peut remarquer, que l'on peut combiner l'équation sur l'énergie totale et l'équation de quantité de mouvement. Pour obtenir une équation sur l'énergie interne seule. En faisant intervenir l'enthalpie on obtient une équation

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho h - p)\vec{u} - \bar{\bar{T}} \cdot \bar{\bar{\nabla}}\vec{u} = \vec{F}_i . \vec{u} + \Phi$$

Cette équation qui à ce stade est strictement équivalente à la conservation d'énergie totale, sera utilisée dans la suite. Les deux raisons sont

a) cette équation ne mélange pas les variations de l'énergie interne et de l'énergie cinétique qui seront évaluées dans la discrétisation avec des méthodes différentes

b) si on fait passer à droite de l'équation les termes dissipatifs cette équation prend la forme :

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \mathrm{div} \, \rho h \, \vec{u} - \vec{u} . \nabla p = \emptyset$$

Soit en faisant intervenir l'entropie S par la relation $TdS = dh - \frac{dp}{\rho}$ on obtient

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \rho T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{u} \nabla S\right) = \emptyset$$

On peut ainsi apprécier le comportement de l'entropie dans l'écoulement.

Nous pouvons maintenant donner le système d'équations tel qu'il est traité.

On dispose d'une équation d'état : $\rho = f(P,h)$.

Dans le domaine Ω les trois équations suivantes régissent l'écoulement.

Conservation de masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho\vec{u} = 0$$

Conservation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho\vec{u} + \vec{\nabla}(\rho\vec{u} \times \vec{u}) + \vec{\nabla}p = \rho\vec{g} + \vec{F}_x$$

Conservation de l'énergie interne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho h - \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div } \rho h\vec{u} - \vec{u}.\vec{\nabla}p = \Phi$$

Les conditions aux limites admises sont de trois types :

- conditions d'entrée : sur une partie Γ_e de la frontière le débit est fixé entrant. L'enthalpie du fluide entrant est aussi fixée.

- conditions de sortie : sur une partie Γ_s de la frontière, le fluide sort. On fixe la pression de sortie

C - *INVARIANTS DU SYSTEME ET CONDITIONS AUX LIMITES-*

Dans le cadre qui nous intéresse, l'écoulement du fluide diphasique dans le modèle homogène, est régi par les équations d'un fluide compressible. Ce système d'équations est hyperbolique non linéaire. Il est important de connaître le sens de propagation des informations pour déterminer les conditions aux limites à utiliser.

1°) *Invariants du système et conditions aux limites* -

Le cas monodimensionnel permet de pousser les calculs des invariants du système. Il sert d'exemple pour mettre en évidence l'importance de la vitesse du son introduite précédemment.

On part du système écrit en coordonnées Eulériennes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho u = 0$$

$$\frac{\rho \partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \rho F$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} uE + \frac{\partial}{\partial x} (up) = \rho u F + \emptyset \qquad E = \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 = \text{énergie totale volumique}$$

On effectue le changement de coordonnées :

$$d\xi = dt + udx$$

$$dX = \rho dx$$

Pour mettre les équations sous forme Lagrangienne. On remplace aussi la variable ρ par le volume massique $\tau = \frac{1}{\rho}$, et l'énergie volumique E, par l'énergie massique $E' = E/\rho$, on obtient alors le système :

$$\frac{\partial \tau}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial X} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial P}{\partial X} = F$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial X}(uP) = uF + \phi/\rho$$

On introduit la grandeur C, telle que $\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\right)_{s=cte} = -\frac{1}{C^2}$. On a la relation entre C et la vitesse du son définie par $\left(\frac{f}{\rho}\right)_{s=cte} = \frac{1}{C^2}$: $C = \rho . c$

En suivant un calcul classique [25] on établit les relations suivantes :

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} + C^2 \frac{\partial \tau}{\partial X} = \phi/\rho \times \left(\frac{\partial P}{\partial E},\right)_{\tau=cte}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - C^{-1} \frac{\partial p}{\partial \xi}\right) - C\left(\frac{\partial u}{\partial X} - C^{-1} \frac{\partial p}{\partial X}\right) = u\,\tau\, C/x + F - C^{-1} \frac{\Phi}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial E},\right)_{\tau}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + C^{-1} \frac{\partial p}{\partial \xi}\right) + C \left(\frac{\partial u}{\partial X} + C^{-1} \frac{\partial p}{\partial X}\right) = - u\,\tau\, C/x + F + C^{-1} \frac{\Phi}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial E},\right)_{\tau}$$

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = \frac{\Phi}{\rho}$$

On définit ainsi trois invariants :

- l'entropie s dont les courbes intégrales correspondent à la vitesse u
- J^+ tel que $dJ^+ = du - C^{-1}\, dp$ dont les courbes intégrales correspondent à la vitesse u-c
- J^- tel que $dJ^- = du + C^{-1}\, dp$ dont les courbes intégrales correspondent à la vitesse u+c

La vitesse du son, c, apparaît donc comme une valeur importante pour la vitesse. Dans le cas d'un écoulement subsonique l'une des courbes caractéristiques va en sens inverse de la vitesse. Dans le cas d'un écoulement bidimensionnel, cela fixe le nombre de conditions aux limites pour les frontières ouvertes. Lorsque le débit sort, il faut tenir compte d'une information entrante, on impose donc une condition de sortie. De même, à l'entrée il est logique de ne tenir compte que de trois conditions aux limites. Sur les parois, on n'impose pas de condition supplémentaire lorsque le système ne contient pas de termes de diffusion. Si on ajoute un terme du second ordre dans les équations sur la vitesse on peut forcer la vitesse tangentielle. Dans la pratique, les conditions aux limites ne correspondent pas exactement aux invariants qu'il est difficile de calculer. Des considérations sur l'évolution de l'énergie totale permettent de les fixer.

2°) *Energie totale* -

Dans un fluide compressible on ne peut parler de conservation de l'énergie cinétique seule. Il y a échange entre l'énergie cinétique et l'énergie interne par l'intermédiaire de la compressibilité dans le terme de gradient de pression. Lorsqu'il n'y a ni forces extérieures ni apport de chaleur, l'énergie totale, $E = \rho e + 1/2\ \rho u^2 = \rho h - p + 1/2\ \rho u^2$, est un invariant du système. En effet on obtient :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\left(\rho h + \frac{1}{2}\rho u^2\right)\vec{u}\right) = 0$$

Donc dans le cas où l'écoulement reste confiné dans le domaine de calcul, l'énergie totale du fluide reste constante. D'autre part si on étudie un régime permanent, le flux d'enthalpie totale $(h + 1/2\ \rho u^2)$ traversant le domaine est conservé. Il semble important que la

discrétisation du problème permette de traduire cette propriété.

Enfin on peut être guidé dans le choix des conditions aux limites à imposer, par leur influence sur l'évolution de l'énergie totale. Le tableau ci-après reproduit les conclusions d'une étude faite par J.P. ESSERS [31] sur des écoulements de gaz parfait dans le cas subsonique.

Effets des conditions aux limites pour un fluide subsonique -

Type	Inconnues fixées	Effet sur l'énergie totale
	ENTREE	
1	$h + 1/2\ u^2$ s ou p + u 2/2 vitesse tangente	Diminution
2	$h + 1/2\ u^2$ vitesse tangente	Augmentation
3	$h + 1/2\ u^2$ vitesse normale vitesse tangente	Augmentation
	SORTIE	
1	vitesse normale	Diminution
2	pression : p	Diminution

II - DESCRIPTION DES ESPACES DE FONCTIONS UTILISEES

A) Utilité des discontinuités pour le traitement de l'équation de convection linéaire

B) Traitement de l'équation d'onde linéaire

C) Description des éléments finis mixtes utilisés.

Annexes :

A.1 : Notations

A.2 : Démonstration des propriétés de variation bornée.

Dans les cas extrêmes le système d'équations d'EULER contient deux problèmes : la convection par le fluide de quantités, telles que l'énergie ou la masse, la propagation des ondes dans le milieu. C'est le souci de pouvoir traiter ces deux phénomènes qui a entraîné l'utilisation des éléments finis mixtes.

A - *UTILITE DES DISCONTINUITES POUR TRAITER UN PROBLEME DE CONVECTION* -

Le système des équations d'Euler comporte le problème du traitement de la convection de quantités scalaires telle que la densité ou l'énergie.

Nous nous limiterons ici à un problème de convection linéaire sans second membre dans un ouvert borné de R^2

P2

Trouver l'application $\rho(x,t) : \Omega \times]0,T[\to R$

telle que $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{u}_{(x)} = 0$

$\rho(x,o) = \rho_0(x)$ sur Ω

$\rho / \Gamma_e = \rho_1(x,t) / \Gamma_e$

Ω est un ouvert polygonal borné de R^2, $\vec{u}_{(x)}$ est un champ de vecteurs constant dans le temps tel que $\operatorname{div} \vec{u} = 0$, Γ_e est la frontière de Ω où la composante normale de $\vec{u}$ est dirigée vers l'extérieur de Ω.

Dans sa thèse, Mr. LESAINT [19] a étudié l'approximation des systèmes symétriques de Friedrich par différents types d'éléments finis. Il a en particulier comparé les éléments

définis sur des triangles ou des rectangles utilisant des approximations polynomiales continues ou discontinues. Il a pu démontrer dans les deux cas des théorèmes de convergence en norme $L^1(\Omega)$ vers la solution lorsque le pas tant vers zéro. Cependant, il a clairement montré dans ce cas l'avantage des éléments discontinus, qui donnent des schémas inconditionnellement stables.

Ces idées peuvent s'appliquer aux équations de convection en considérant des éléments finis en espace et en temps. Ceci a été développé par Mr. FINI [20] par exemple, qui a pu ainsi construire des familles de schéma stables.

Cependant, ces schémas sont de construction difficile pour un problème multidimensionel, de plus ils couplent fortement la solution aux pas de temps successifs. Nous allons plutôt nous intéresser à ce que l'on pourrait appeler un schéma mixte combinant l'approximation éléments finis en espace, et l'interprétation par différences finies en temps.

Schémas mixtes -

Séparant l'espace et le temps, on cherche des solutions approchées à chaque pas de temps sous la forme :

$$\varphi_1^t(x) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i^t \varphi_i(x) \qquad x \in \Omega \subset R^2$$

$$t \in]0, T[$$

Les $\varphi_i(x)$; $i = 1,N$; sont les fonctions de base d'un espace discrétisé V_h de fonctions définies sur Ω.

Le choix des espaces V_h peut être relativement large entre fonctions continues ou discontinues de différents degrés (réf. 23, 24, 25).

Tous les auteurs s'attachent à ce que le schéma vérifie deux propriétés essentielles :

- la positivité si $\rho_t \geq 0$, alors $\rho_{t+\Delta t} \geq 0$
- la monotonie : ne pas introduire d'oscillations parasites.

Nous nous limitons ici au cas d'un ouvert polygonal Ω de R^2, sur lequel on définit un maillage τ_h de quadrangles . L'espace V_h est l'ensemble des fonctions constantes par élément.

Soit Γ la frontière de Ω, Γ_e est la partie de la frontière où la composante normale extérieure du vecteur $\vec{u}$ est négative. On définit sur Γ_e, une valeur extérieure des fonctions comme condition aux limites.

On définit ensuite les deux schémas, que l'on obtient en choisissant la valeur de ρ en amont des côtés pour exprimer $\mathrm{div}(\rho\vec{u})$.

(S_1) Schéma explicite :

$$\forall K \in \mathcal{C}_h \quad \frac{1}{\Delta t}(\rho_K^{t+\Delta t} - \rho_K^t) \cdot S_K + \sum_{i \in I^-} (\rho_K^t - \rho_{K_i^+}^t) \times \int_{C_i} \vec{u}.\vec{\nu}_i \, ds = 0$$

(S_2) Schéma implicite :

$$\forall K \in \mathcal{C}_h \quad \frac{1}{\Delta t}(\rho_K^{t+\Delta t} - \rho_K^t) \cdot S_K + \sum_{i \in I^-} (\rho_K^{t+\Delta t} - \rho_{K_i^+}^{t+\Delta t}) \cdot \int_{C_i} \vec{u}.\vec{\nu}_i \, ds = 0$$

S_K est l'aire du quatriangle K , ρ_K la valeur constante de ρ_K sur K, . I^- est l'ensemble des côtés C_i de K où l'intégrale $\int_{Ci} \vec{u}_i \vec{\nu}_i \, ds$ est négative, $\vec{\nu}_i$ est la normale extérieure à K du côté C_i, K_i^+ est l'élément en amont de C_i.

Pour la proposition suivante, on impose de plus au champ de vecteur $\vec{u}(x)$ de ne pas dépendre du temps et de vérifier la condition de régularité : div $\vec{u} = 0$, et il existe une constante C telle que quelque soit le vecteur unitaire $\vec{e}_i$, $\forall$ x et y $\in \Omega$: $| \vec{u}_{(x)}.\vec{e}_i - \vec{u}_{(y)}.\vec{e}_i | \leqslant C \, || x - y ||$.

On impose de plus des conditions de régularité au maillage, lorsque le pas h de la discrétisation en espace tend vers zéro, les quadrangles tendent vers des parallélogrammes, les angles restent supérieurs à un angle θ, les rapports entre les longueurs des côtés qui se suivent dans une direction tendent vers 1.

Alors on peut énoncer la proposition.

Proposition 2-1 : Sous les conditions de régularités ci-dessus, imposées au maillage et au champ de vecteurs $\vec{u}$. Sous la condition que les conditions aux limites imposées sur la frontière Γe restent régulières. Lorsque le pas h en espace et le pas Δt en temps tendent vers zéro, la famille (ρ_h) des solutions approchées par le schéma implicite converge dans $L^1_{loc}(\Omega \times]0,T[)$ vers la solution ρ dans $L^\infty(\Omega \times]0,T[) \cap BV(\Omega \times]0,T[)$, au problème P_1. La famille ρ_h des solutions approchées par le schéma explicite converge de la même façon sous la condition de stabilité (E_1) :

$$(E_1) \qquad \forall k \in \mathcal{C}_h \quad S_K \cdot \frac{1}{\Delta t} > \sum_{i \in I^-} \int_{C_i} \vec{u}.\vec{\nu}_i \, ds$$

où S_K est l'aire de l'élément K, I^- l'ensemble des côtés C_i de K où la vitesse est entrante.

Principe de la démonstration et remarques -

La démonstration est calquée sur celle faite par Mr. LEROUX (réf. 21, p. 42). Bien qu'elle se simplifie énormément puisqu'il n'y a pas à vérifier les conditions relatives au cas non linéaire, elle est assez longue et mise en annexe.

Dans cette démonstration, la convergence provient de trois propriétés que l'on doit vérifier pour les deux schémas :

- conservation de la borne uniforme :

$$\exists M \text{ tel que sur } [\,0,T\,], \ \forall K, \forall t \quad |\rho_K^t| < M$$

- conservation de la variation bornée en espace

$$\sum_{C_j} |\rho_{K_j^-}^t - \rho_{K_j^+}^t| \cdot D_j \leqslant Q_1(t)$$

où C_j est l'ensemble des côtés intérieurs pour une discrétisation donnée. D_j est la longueur du côté j, K_j^- et K_j^+ sont les deux éléments adjacents au côté j. $Q_1(t)$ est une fonction de t uniquement, bornée sur $]\,0,T\,[$. t

- conservation de la variation bornée en temps

$$\sum_{K \in \mathcal{C}_h} | \rho_K^{t+\Delta t} - \rho_K^t | < Q_2(t)$$

où $Q_2(t)$ est une fonction de t uniquement, bornée sur $]\,0,T\,[$.

Ces trois conditions permettent d'assurer que les fonctions approchées restent dans un borné de $W^{1,1}(\Omega \times]\,0,T\,[$. En suivant la démonstration faite par Mr. LEROUX, on en déduit la convergence dans $L^1(\Omega,]\,0,T\,[\ )$.

C'est la condition de variation bornée en espace sur la solution approchée qui impose les conditions de régularité du maillage.

Remarques -

Le schéma d'ordre 1, assure également une monotonie de la solution approchée. On trouve que la valeur prise par ρ dans l'élément K au temps t + Δt est comprise entre l'inf. et le sup. des valeurs prises par ρ dans l'élément K et les éléments directement en amont de K.

Ceci ne serait plus vrai avec les schémas utilisant des polynômes de degré 1, il faut alors envisager une procédure permettant de rétablir la monotonie au temps t + Δt. On peut voir à ce sujet un article de M. VAN LEER (ref. 25). L'avantage de ces méthodes pourrait être de diminuer la diffusion introduite dans le schéma d'ordre 1, mais elles n'ont pas été étudiées ici.

B - *TRAITEMENT DE L'EQUATION D'ONDE LINEAIRE* -

Le système des équations d'Euler contient également un problème d'équations d'ondes.

Dans le cadre d'une théorie linéaire de la propagation de petites perturbations dans le fluide, les variations de masse volumique sont proportionnelles aux variations de pression. Le coefficient de proportionalité est $1/c^2$, où c est la vitesse du son. Ce système dégénère en le système à deux équations suivant.

Trouver le débit $\vec{G}$ et la pression p tels que :

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{G} = 0 \\ \dfrac{\partial \vec{G}}{\partial t} + A.\vec{G} + \vec{\nabla} p = 0 \qquad \text{sur } \Omega_T = \Omega \times \left]0,T\right[\end{array}\right.$$

Ω est un ouvert de R^2, A est un terme de frottement ou de viscosité dans le fluide, tel que l'on puisse obtenir une solution stationnaire. En effet, le fluide peut être très peu compressible, donc le facteur $\frac{1}{\Delta t} \times \frac{1}{c^2}$ arbitrairement petit. D'autre part, on demande à la discrétisation d'être adaptée au problème stationnaire, on doit pouvoir trouver la solution stationnaire quand elle existe.

On veut donc résoudre le problème P_2, mis dans une formulation faible par l'utilisation de la formule de Green :

$$P_2 \left|\begin{array}{l} \text{trouver } \vec{G} \in H(\operatorname{div},\Omega),\ p \in L^2(\Omega) \\ \text{tels que } \displaystyle\int_\Omega \operatorname{div}\vec{G}.q\ dX = 0.\ \forall\ q\ G\ L^2(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega A\,\vec{G}.\vec{v}\ dX - \int_\Omega p \operatorname{div}\vec{v}\ dX = 0 \qquad \forall\ \vec{v} \in \mathcal{H}(\operatorname{div},\Omega) \\ \vec{G}.\vec{\nu} = 0 \text{ sur la frontière F de } \Omega \\ \\ A \text{ est un opérateur symétrique défini positif dans } L^2(\Omega) \end{array}\right.$$

On se trouve dans le cadre du traitement d'un problème elliptique, par des méthodes d'optimisation avec multiplicateurs de Lagrange. (réf. 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 27).

Suivant les théorèmes généraux, dans le cadre abstrait, établis par Mr. BREZZI [27], et suivant une étude faite par Mr. RAVIENT et THOMAS [7], on peut annoncer les résultats suivants.

Propriété 1 : Le problème P_2 tel qu'il est posé admet une solution unique en (G,P) appartenant à $H(\operatorname{div},\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Sans entrer dans le détail, il est intéressant de rappeler ici, une propriété qui lie les espaces $H(\operatorname{div},\Omega)$ et $L^2(\Omega)$, pour un ouvert borné Ω de R^2. La formulation faible $-\int_\Omega p \operatorname{div} v\ dX$ définit une forme biliniaire continue sur $H(\operatorname{div},\Omega)$ et $L^2(\Omega)$:

$$\mathcal{B}(p,\vec{v}) = (B'p,\vec{v}) = (p,\ B\vec{v}) = -\int_\Omega p\ \mathrm{div}\ \vec{v}\ dX$$

B' et B sont des opérateurs adjoints

B' : $L^2(\Omega)$ $H^*(\mathrm{div},\Omega)$ dual de $H(\mathrm{div},\Omega)$

B : $H(\mathrm{div},\Omega) \to L^2(\Omega)$ dual de $L^2(\Omega)$.

De plus, pour un ouvert borné de R^2, il existe une constante C telle que

$$\sup_{\vec{v}\in \mathcal{H}(\mathrm{div},\Omega)} \frac{\int \mathrm{div}\ \vec{v}\ .\ q\ dV}{||\vec{v}||_{H(\mathrm{div}\ \Omega)}} \geq C_\Omega\ ||q|| \qquad \forall\, q \in L^2(\Omega)$$

Or Mr. BREZZI démontre le théorème suivant (réf. 27, Th 01 p 132) utile par la suite.

Théorème : Soient V et Q deux espaces de Hilbert réels, soit B(v,q) une forme biliniaire continue sur V x Q et soit B l'opérateur linéaire associé appliquant V dans Q' dual de Q défini par : $\mathcal{B}(q,\vec{v}) = (q,Bv)$ $\forall\, v \in V$, $\forall\, q \in Q$.

Pour tout k > 0 les 3 propositions suivantes sont équivalentes :

i) $\sup_{v(V-\{0\})} \frac{B(q,v)}{||v||_V} \geq k\ ||q||_Q \qquad \forall\, q \in Q$

ii) $||B'q|| \geq k\ ||q|| \qquad \forall\, q \in Q$

iii) un opérateur S de Q' dans V, linéaire continu, tel que BS = I sur Q' et $||S|| \leq k^{-1}$.

Si maintenant on cherche des solutions approchées dans des espaces V_h et Q_h, en suivant une étude faite par Mr. RAVIART et Mr. THOMAS [7] sur des problèmes elliptiques du second ordre, et grâce au théorème général donné par M. BREZZI (Th 2.1. p. 41 (27)). On peut donner le résultat suivant :

On définit le problème P_h : Soit $V_h \subset H(\mathrm{div},\Omega)$, $Q_h \subset L^2(\Omega)$

trouver G_h et P_h $\in$ $V_h \times Q_h$

tels que :

$$\forall\, v_h \in V_h \int_\Omega A\ G_h\ .\ v_h\ dX + \int_\Omega P_h\ \mathrm{div}\ v_h\ dX = 0$$

$$\forall\, q_h \in Q_h \int_\Omega q_h \times \mathrm{div}\ G_h\ dX = 0$$

On a d'autre part, $\forall G \in V \int_\Omega A\,G \times G\,dX > a \,\|G\|^2_V$

Alors :

Théorème :

Sous les hypothèses :

H1
$$\left.\begin{array}{l} G_h \in V_h \\ \forall q_h \in Q_h \quad \text{et} \int q_h \,\text{div}\, G_h \,dX = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{div}\, G_k = 0$$

H2
$$\exists \alpha > 0,\ \forall q_h \in Q_h \quad \sup_{G_h \in V_h} \int \frac{q_h \,.\, \text{div}\, G_h \,dX}{\|G_h\|_{H(\text{div},\Omega)}} \geq \alpha \|q_h\|$$

Le problème (P_h) admet une solution unique, et (G,p) appartenant à $H(\text{div},\Omega) \times L^2(\Omega)$ étant la solution de (P_2), il existe une constante σ telle que :

$$\|G-G_h\|_{H(\text{div},\Omega)} + \|p-P_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \sigma \inf_{v_h \in V_h} \|G-v_h\|_{H(\text{div},\Omega)} + \inf_{q_h \in Q_h} \|P-q_h\|_{L^2(\Omega)}$$

Les éléments finis mixtes dont on va rappeler brièvement les propriétés ont été introduits dans le cadre de cette discrétisation pour vérifier les hypothèses H_1 et H_2.

C - *DEFINITION ET PROPRIETES DES ELEMENTS MIXTES* -

Compt tenu des résultats obtenus sur la convection, on s'est limité dans l'application qui est faite ici aux fonctions scalaires constantes par morceau sur des quadrangles. Nous présenterons donc ici les éléments vectoriels associés dans le cadre des éléments mixtes à ces fonctions scalaires. Nous nous efforcerons sur cet exemple, de montrer les principales propriétés de ce type d'éléments utiles dans le cadre de cette étude. Nous laissons le soin au lecteur intéressé de se reporter à la thèse de Mr. THOMAS [8] pour l'étude générale de ce type d'éléments finis.

Nous commencerons par décrire des éléments, puis nous verrons qu'ils vérifient les propriétés H1 et H2, ainsi qu'un théorème d'approximation.

1°) *Définition de l'élément de référence* -

Comme pour les éléments finis classiques on commence à les définir sur une figure de référence, en donnant les trois objets qui déterminent un élément fini : la figure géométrique $\hat{K}$, l'espace des fonctions d'interpolation $\hat{V}$, l'ensemble des degrés de liberté $\hat{M}$.

Les seuls éléments utilisés sont des quadrangles, l'élément de référence est le carré.

Le carré -

On démontre (réf. (8) III.14) que l'on définit un élément $\hat{V}_k$ de référence pour l'espace V_k des vecteurs de H(div,Ω) en se donnant :

- le carré $\hat{C}$ de côtés de longueur 1
- l'espace C_k de fonctions vectorielles $\vec{v} = (\vec{v}, \vec{v}_2)$ polynomiales

$$C_k : \{ \hat{v} = (v_1, v_2), v_1 \in P_{k,k-1} , v_2 \in P_{k-1,k} \}^*$$

Les degrés de liberté suivants:

- valeurs $\hat{v}$ $\hat{v}$ des composantes normales en k points distincts sur chaque côté
- les moments

$$M x_{ij} = \int_{\hat{e}} \hat{v}_1 \hat{x}^i \hat{y}^j \, d\hat{x} \, d\hat{y} \quad 0 \leq i \leq k-2 \ , \ 0 \leq j \leq k-1$$

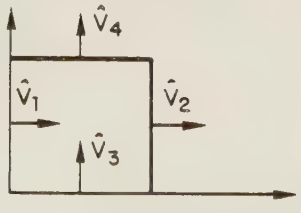
$$M y_{ij} = \int_{\hat{c}} \hat{v}_2 \hat{x}^i \hat{y}^j \, d\hat{x} \, d\hat{y} \quad 0 \leq i \leq k-1 \ , \ 0 \leq j \leq k-2$$

On obtient l'élément $\hat{T}_{k-1}$ correspondant dans l'espace Q_k en se donnant :

- le même carré $\hat{C}$
- l'espace Q_{k-1} des fonctions polynomiales de degré $\leq k-1$
- les degrés de liberté : $Mj = \int_{\hat{C}} \psi_j \varphi \, dX$ où les φ_j définissent une base de Q_{k-1}.

Les éléments utilisés ici sont :

$\hat{V}_1$ pour les vecteurs :



$$\hat{v}_1 \mid \begin{matrix} 1-\hat{x} \\ 0 \end{matrix} \qquad \hat{v}_2 \mid \begin{matrix} \hat{x} \\ 0 \end{matrix}$$

$$\hat{v}_3 \mid \begin{matrix} 0 \\ 1-\hat{y} \end{matrix} \qquad \hat{v}_4 \mid \begin{matrix} 0 \\ \hat{y} \end{matrix}$$

---

* la définition des polynomes $P_{k,l}$ est rappelée dans les notations avec tous les types de polynômes utilisés sur le carré de référence

Une fonction $\hat{v}$ de $\hat{V}_1$ a pour expression :

$$\hat{v}_x = a_1 + b_1 \hat{x}$$

$$\hat{v}_y = a_2 + b_2 \hat{y}$$

Les quatre moments de $\hat{V}_1$ sont les valeurs de la composante normale du vecteur sur chacun des quatre côtés, les vecteurs de base choisis sont $\hat{v}_1$, $\hat{v}_2$, $\hat{v}_3$, $\hat{v}_4$ (fig. II.1).

$\hat{T}_0$ pour les scalaires :

La fonction q de $\hat{Q}_0$ est constante sur $\hat{C}$, sa valeur unique est son degré de liberté.

Deux propriétés établies dans le cas général (réf. 8) permettent de vérifier qu'à l'intérieur de l'élément de référence les espaces $\hat{V}_1$ et $\hat{T}_1$ satisfont aux hypothèses H_1 et H_2.

Propriété 1 :

L'application trace normale de V_h sur les polynômes de S_{k-1}, sur chaque côté de l'élément est surjective.

Propriété 2 :

L'opérateur divergence applique l'espace V_k dans T_{k-1}, de plus il est surjectif : $\forall q \in T_{-1}, \exists \vec{v} \in V_h$ tel que $q = \operatorname{div} \vec{v}$. Ces propriétés sont immédiates dans le cas de $\hat{V}_1$ et $\hat{T}_0$.

2°) *Définition d'une famille d'éléments finis* -

On veut maintenant, à l'aide de cet élément de référence, construire les espaces V_h et Q_h sur un ouvert polygonal de R^2. On construit un maillage $\mathcal{C}_h$ de Ω, formé de quadrangles convexes, de diamètre inférieur à h. Il existe alors pour tout élément K de $\mathcal{C}_h$ une bijection F_K du carré de référence $\hat{K}$ sur l'élément K.

On va être amené à imposer des restrictions sur la transformation F_K.

Tout d'abord, pour un élément K, si h_K est le diamètre de l'élément, si on appelle DF_K le jacobien de F_K, et DF_K^{-1} le jacobien de l'inverse, la propriété suivante est toujours vraie :

$$\forall K \in \mathcal{C}_h \qquad |DF| \leq \sqrt{2}\, h_K$$

On dit que le maillage $\mathcal{C}_h$ est régulier si il existe $\sigma > 0$ indépendant de h, tel que : $\forall K \in \mathcal{C}_h \; |DF^{-1}| \leq \sigma h_K^{-1}$.

Le maillage est dit uniformément régulier si en outre il existe $\tau > 0$, indépendant de k tel que : $\forall K \in \mathcal{C}_h \quad h_K \geq \tau . h$.

Le maillage $\mathcal{C}_h$ est affine si pour tout élément K de $\mathcal{C}_h$, la transformation F_K est linéaire.

Pour définir la famille d'éléments finis associée au maillage, il reste à définir les applications $\mathcal{F}$, faisant correspondre les variables scalaires et l'application G, faisant correspondre les fonctions vectorielles.

Application $\mathcal{F}$:

Soit $\hat{\varphi}(\hat{x})$ une fonction scalaire définie sur $\hat{K}$, on définit une fonction $\varphi(x)$ sur K par la relation :

$$\varphi = \mathcal{F}(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi} \circ F_K \qquad ; \qquad \varphi(x) = \hat{\varphi}(\hat{x}) \text{ avec } x = F_K(\hat{x})$$

Application $\mathcal{G}$:

Soit $\hat{v}(\hat{x})$ une fonction définie dans $H(div,\hat{K})$, on lui fait correspondre la fonction $\vec{v}(x)$ de $H(div,K)$ pour la relation :

$$\vec{v} = G(\hat{v}) = \frac{1}{J_K} \cdot DF_K \cdot \hat{v} \circ F_K$$

DF_K est la matrice jacobienne de F_K, J_K son déterminant. On démontre (8 II-16) que ces transformations ont les propriétés suivantes :

Propriété 1 : L'application $\mathcal{F}$ définit un isomorphisme de $L_2(\hat{k})$ dans $L_2(k)$

Propriété 2 : L'application $\mathcal{G}$ définit un isomorphisme de $H(div.\hat{k})$ dans $H(div.k)$

Propriété 3 : $\forall \hat{\varphi} \in L^2(\hat{K}),\ \forall \hat{v} \in H(div,\hat{K}) : \int_K \hat{\varphi} \cdot div\ \hat{v}\ d\hat{x} = \int_K \varphi \cdot div\ K\ dx$

Propriété 4 :

$$\forall \hat{\varphi} \in L^2(\hat{K}),\ \forall \hat{v} \in H(div,\hat{K}) : \int_{\partial K} \hat{\varphi}\ \hat{v}.\hat{\nu}\ d\hat{s} = \int_{\partial K} \varphi\ v.\nu\ ds$$

où $\partial\hat{K}$ est la frontière de $\hat{K}$, $\hat{\nu}$ la normale extérieure sur $\partial\hat{K}$, et ν est la normale extérieure sur ∂K.

Remarques -

Ces propriétés permettent d'établir que l'on a bien construit un espace $Q \subset L^2(\Omega)$ et un espace $V \subset H(div\ (\Omega)$. En effet la propriété 4 permet de construire des fonctions dont les composantes normales sont continues au passage des côtés du maillage.

Pour les éléments utilisés les moments d'interpolation sur le maillage $\mathcal{C}_h$ sont donc :

pour Q_0 : les valeurs moyennes sur chaque élément

sur un élément K : $q_h = \frac{1}{SK} \cdot \int_K q \, dX$

pour V_0 : les valeurs moyennes des composantes normales sur les côtés du maillage

sur un côté C : $\vec{u}_h.\vec{\nu}_c = \frac{1}{D_C} \times \int_C \vec{u}.\vec{\nu}_c \, ds$

3°) *Correspondance entre V_1 et Q_0, théorème d'interpolation* -

Il faut maintenant montrer que les espaces utilisés vérifient les propriétés H_1 et H_2, et qu'ils permettent d'approcher des fonctions de $L^2(\Omega)$ et $H(div,\Omega)$ lorsque le pas R tend vers zéro.

Vérification des hypothèses H_1 et H_2 -

La frontière F de Ω est décomposée en F_D où la composante normale des éléments de V est nulle, F_n où la valeur extérieure des fonctions de Q est nulle. $F = F_D \cup F_N$. Le maillage $\mathcal{C}_h$ est compatible avec cette décomposition. Tout côté ouvert ∂K d'un élément de $K \in \mathcal{C}_h$ est contenu

- soit dans Ω
- soit dans F_N
- soit dans F_D

Vérification de l'hypothèse H_1 -

Soit un élément $\vec{v}$ de V_h, et supposons que pour tout élément q de Q_h on ait :

$$\int_\Omega q \, \text{div} \, \vec{v} \, dX = 0$$

D'après la propriété 3, dans tout élément K, q et $\vec{v}$ sont les transformées de fonctions $\hat{q}$ et $\hat{v}$ de l'élément de référence $\hat{K}$, et on a la propriété

$$\int_{\hat{K}} \hat{q} \, . \, \text{div} \, \hat{v} \, d\hat{X} = \int_K q.\text{div} \, \vec{v} \, dX$$

Si on fait décrire à $\hat{q}$ la base des éléments T_{k-1} dans $\hat{K}$, on en déduit que div $\hat{v} = 0$. Or, toujours d'après la proposition 3 on peut écrire localement div $\hat{v} = \frac{1}{J_K}$ div $\vec{v}$ avec $J_K \neq 0$.

Donc div $\vec{v}$ est nulle dans tous les éléments K. L'hypothèse H_1 est satisfaite.

Vérification de l'hypothèse H_2 -

On commence par montrer que si, pour tout $\vec{v}$ de V_h, $\int_\Omega q \operatorname{div} \vec{v}\, dX = 0$ et q appartient à Q_h; alors q est nul. Ceci prouve que l'opérateur S inverse de B existe. Puisque les espaces V_h et Q_h sont de dimension finie, il existe donc $\mathcal{C}_h$ tel que :

$$\operatorname{Sup}_{\vec{v} \in V_h} \frac{\int_\Omega q \operatorname{div} \vec{v}\, dX}{||\vec{v}||_{\mathcal{H}(\operatorname{div},\Omega)}} \geq \tau_h \; ||q||_{L^2(\Omega)} \quad \text{pour tout } q \text{ de } Q_h$$

Il faut ensuite montrer que τ_h peut être minoré par une constante positive τ, indépendante du maillage.

Première partie -

Si on se restreint dans un premier temps, aux vecteurs de V_h, dans un élément K, tels que leurs composantes normales aux côtés de K soient nulles, l'hypothèse $\int_K q \operatorname{div} \vec{v}\, dX = 0$, entraîne que q est une constante sur K. On peut le voir pour les quadrangles dans le cas d'un degré d'interpolation h. On passe sur l'élément de référence $\hat{K}$:

$$\forall\ \hat{v}^* \text{ tel que } \hat{v}^* \nu_{\hat{.}} = 0 \text{ sur } \partial\hat{K}, \quad \int_{\hat{K}} \hat{q} \operatorname{div} \hat{v}^*\, d\hat{X} = 0$$

Or, si on regarde les deux composantes de $\hat{v}^*$, $v^*_{\hat{x}}$ et $v^*_{\hat{y}}$:

$v^*_{\hat{x}}$ est un polynôme de la forme $\hat{x}(\hat{x}-1)\, P^1_{k-1,k-1}$

$v^*_{\hat{y}}$ est un polynôme de la forme $\hat{y}(\hat{y}-1)\, P^2_{k-1,k-2}$

La divergence $\frac{\partial}{\partial \hat{x}} v^*_{\hat{x}} + \frac{\partial}{\partial \hat{y}} = 2\,\hat{x}\, P^1_{h-2,h-1} + 2\,\hat{y}\, P^2_{k-1,k-2} + Q_{k-2}(\hat{x},\hat{y})$

$$= Q_{k-2}(\hat{x},\hat{y}) + \hat{x}^{k-2}\,\hat{y}^{k-2}(\alpha\hat{x} + \beta\hat{y} + (\alpha+\beta)\,\hat{x}\,\hat{y})$$

Où $Q_{k-2}(\hat{x},\hat{y})$ est un polynôme quelconque Q_{k-2}, α et β sont libres également. Donc l'espace des divergences des $\hat{v}^*$ est l'ensemble des polynômes de Q_{k-1}, auquel on impose une condition linéaire : le coefficient du terme de degré le plus élevé est la somme des coefficients des deux termes de degré immédiatement inférieur. Donc l'orthogonal de l'espace des div $\hat{v}^*$ est un sous espace de dimension 1. Comme $\int_{\hat{K}} \operatorname{div} \hat{v}^*\, dX = 0$, ce sous espace est formé des constantes sur $\hat{K}$. Cette propriété est immédiate pour V_1 et T_0.

La fonction q est donc constante par élément du maillage. Supposons que cette constante ne soit pas partout la même. Alors il existe deux éléments adjacents K_1 et K_2 de côté commun ∂_K tels que la ρ vaille respectivement ρ_1 et ρ_2. Alors, on peut choisir dans V_h une fonction v, dont la composante normale vaut 1 sur ∂K et zéro partout ailleurs. Alors $\int_\Omega q \operatorname{div} \vec{v}\, dX =$ Mesure $(\partial K).(\rho_1 - \rho_2) = 0$. D'où contradiction.

Si on a imposé sur F_0 que la valeur de ρ externe est nulle, on choisit un élément K ayant un côté commun avec F_0, et on conclut par la même démonstration que ρ est seul sur Ω.

2ème partie -

On sait maintenant qu'il existe un opérateur S de Q_h dans V_h tel que pour tout q de Q_h, il existe $v^* = S(q)$ et $\int_\Omega \operatorname{div} v^* \cdot p\, dX = \int_\Omega q.p\, dX \quad \forall p \in Q_h$.

Si on désigne par Z le noyau de l'opérateur divergence, et par $Z^\perp$ son orthogonale dans V_h, on sait que l'on peut chercher v dans $Z^\perp$ et qu'il est unique (Mr. BREZZI : réf. 27).

Dans $Z^\perp$ $\| \operatorname{div} v \|_{L^2(\Omega)}$ est une norme pour $H(\operatorname{div},\Omega)$, et en particulier il existe une constante C ne dépendant que du domaine Ω telle que $\| \operatorname{div} v \|_{L^2(\Omega)} > C \| v \|_{L^2(\Omega)}$ pour tout v de $Z^\perp$.

D'autre part si on se place sur un élément, on a pour toute fonction de Q_h, p définie sur l'élément K

$$\int_K p \cdot \operatorname{div} \vec{v}^* \, dX = \int_K p \cdot q \, dX$$

On a d'autre part sur l'élément de référence :

$$\int_{\hat{K}} \hat{p} \operatorname{div} \hat{v}^* \, d\hat{X} = \int_K p \operatorname{div} v^* \, dX = \int_{\hat{K}} \hat{p} \cdot \hat{q} \cdot J_K \, d\hat{X}$$

J_K est le jacobien de la transformation de $\hat{K}$ sur K.

Donc si la famille d'éléments finis est régulière uniformément, il existe σ tel que

$$\left| \frac{1}{J_K} \right| < \sigma h_K^{-1}$$

Donc sur $\hat{K}$, dans l'espace des polynômes T_{h-1}, on peut dire que $| \operatorname{div} \hat{v} | \leq \hat{q}_1 . \sqrt{2}\, h_K$

car $| J_K | < \sqrt{2}\, h_K$ et $\operatorname{div} v^* = \frac{1}{J_K} \operatorname{div} \hat{v}$.

donc $\quad |\operatorname{div} v^*| \leq \left|\frac{1}{J_K}\right| \, |\operatorname{div} \hat{v}^*| \leq \sigma\sqrt{2}\ |\hat{q}| = \sigma.\sqrt{2}\ |q|$

Donc sur K :

$$\int_K |\operatorname{div} v^*|^2 \, dX \leq 2.\sigma^2 \int_K |q|^2 \, dX$$

En faisant la somme sur tous les éléments du maillage on trouve

$$\int_\Omega |\operatorname{div} v^*|^2 \, dX \leq 2.\sigma^2 \int_\Omega |q|^2 \, dX$$

Donc pour tout v appartenant à $Z^\perp$

$$||v^*||^2_{H(\operatorname{div},\Omega)} = ||v^*||^2_{L^2(\Omega)^2} + ||\operatorname{div} v^*||^2_{L^2(\Omega)} \leq \sigma^2 \times 2\,(1 + C^2_\Omega)\ ||q||^2_{L^2(\Omega)}$$

On choisit $v^* = S(q)$ dans $Z^\perp$

$$\operatorname*{Sup}_{v \in V_h} \frac{\int_\Omega \operatorname{div} v \, . \, q \, dX}{||v||_{H(\operatorname{div},\Omega)}} \geq \frac{\int \operatorname{div} v^* . q \, dX}{||v^*||_{H(\operatorname{div},\Omega)}} = \frac{||q||^2_{L^2(\Omega)}}{||v^*||_{(\operatorname{div},\Omega)}} \geq \frac{1}{\sigma\sqrt{2(1+C\Omega}}\ ||q||_{L^2(\Omega)}$$

Ceci termine la démonstration.

Théorèmes d'interpolation pour V_1 et Q_0 -

L'espace Q_0 nous donne une interpolation d'ordre 1 pour l'approximation des fonctions de $L^2(\Omega)$.

D'après les théorèmes d'interpolation sur les éléments finis, (Mr. CIARLET-RAVIART réf. 7). On peut énoncer le théorème.

Théorème -

Si on définit sur l'ouvert Ω, un maillage uniformément régulier, il existe une contrainte C(Ω) telle que lorsque le pas h du maillage tend vers zéro :

$$\forall\, q \in H^1(\Omega) \quad , \quad ||q - \pi q||_{L^2(\Omega)} \leq C\, h_K\ |q|_{1K}$$

où πq est l'interpolation de q dans Q_0.

L'interpolation des vecteurs de H(div,Ω) dans V_1 pose un problème. En effet,l'application du carré sur un quadrangle quelconque n'est pas affine.

Le théorème démontré par Mr. THOMAS, dans le cas des quadrangles (réf. (8), (p. III.26), th 4.3).

Théorème -

On définit l'opérateur de projection π, par le fait que si les $M_i(v)$ sont les moments de v sur K, $M_i(v) = M_i(\pi v)$.

Il existe une constante C ; qui ne dépend que de k et de C telle que pour tout entier m avec $1 \leq m \leq L$ on ait

(T1) : $\forall \vec{v} \in (H^m(K))^2$ avec $\operatorname{div} \vec{v} \in M^m(k)$

$$|| v - \pi v ||_{0,K} \leq C h_K^m (|v|_{m,K} + h_K | \operatorname{div} v |_{m,K})$$

(T2) : $\forall \vec{v}$ $(M^1(K))^2$ avec div $\vec{v}$ $H^m(K)$

$$|| \operatorname{div}(v - \pi v) ||_{OK} \leq C h_K^{m-1}(|\operatorname{div} v|_{m-1,K} |\operatorname{div} (\vec{v})|_{m,K})$$

On voit que ce théorème ne permet pas d'affirmer la convergence de πv vers v pour la divergence.

On va rejoindre ici la condition imposée sur le maillage pour que le schéma discrétisant la convection converge (II.1).

Dans le cas m = 1, dans la démonstration de Mr. THOMAS (réf. 8 p III-29), on aboutit sur une majoration :

$$| \operatorname{div} \hat{v}|_{1,\hat{K}} \leq (\sup_{\hat{x} \in \hat{K}} J(\hat{x})^{1/2} \; |DF| \; | \operatorname{div} v |_{0,K} +$$

$$(\inf_{\hat{x} \in K} J(\hat{x}))^{-1/2} \times | \operatorname{grad} J | \times \int_K | \operatorname{div} v | \, dX)$$

Dans le cas non affine, on ne peut annuler grad J. DF est la matrice jacobienne de la transformation F_K de $\hat{K}$ dans K, J est son déterminant.

La transformation de $\hat{K}$ dans K est un polynôme $Q_1(\hat{x},\hat{y})$ sur $\hat{K}$.Soient $(a_x^{(i)}, a_j^{(i)})$

les coordonnées des sommets i de K, i = 1, 2, 3, 4. L'expression de $J(\hat{x})$ est un polynôme de degré 1 en x,y.

$$J(\hat{x}) = \left[a_x^{(2)} - a_x^{(1)} \right] \cdot \left[a_y^{(4)} - a_y^{(1)} \right] - \left[a_y^{(2)} - a_y^{(1)} \right] \cdot \left[a_x^{(4)} - a_x^{(1)} \right]$$

$$+ \hat{x} \cdot x \left[\left[a_x^{(2)} - a_x^{(1)} \right] \times \left[a_y^{(3)} - a_y^{(4)} \right] - \left[a_y^{(2)} - a_y^{(1)} \right] \times \left[a_x^{(3)} - a_x^{(4)} \right] \right]$$

$$+ \hat{y} \cdot \left[\left[a_y^{(4)} - a_y^{(1)} \right] + \left[a_x^{(3)} - a_x^{(2)} \right] - \left[a_x^{(4)} - a_x^{(1)} \right] \times \left[a_y^{(3)} - a_y^{(2)} \right] \right]$$

grad J est constant et on trouve

$$\text{grad } J = \begin{vmatrix} (a_x^{(2)} - a_x^{(1)}) \, \delta_2 - (a_y^{(2)} - a_y^{(1)}) \, \delta_1 \\ \\ (a_y^{(4)} - a_y^{(1)}) \, \delta_1 - (a_x^{(4)} - a_x^{(1)}) \, \delta_2 \end{vmatrix}$$

où $\quad \delta_i = a_i^{(1)} - a_i^{(2)} + a_i^{(3)} - a_i^{(4)} \qquad i = 1,2$ pour x ou y

$\delta_K = (\delta_1^{\,2} + \delta_2^{\,2})^{1/2}$ est la distance entre les milieux des diagonales.

On utilise le fait que dans l'interpolation par une constante sur $\hat{K}$:

$$||\text{div } (\vec{v} - \vec{\pi v})||_{0,K} \leq (\inf_{\hat{x} \in \hat{K}} J(\hat{x}))^{-1/2} \cdot ||\text{div}(v - \pi\hat{v})||_{0,\hat{K}}$$

$$\leq C \cdot (\inf_{\hat{x} \in \hat{K}} J(\hat{x}))^{-1/2} \left[\text{div } \hat{v} \right]_{1,\hat{K}}$$

On utilise l'encadrement :

$$\forall \hat{x} \in \hat{K} \qquad \sigma^{-1} h_K \leq ||DF^{-1}||^{-1} \leq J(\hat{x})^{1/2} \leq ||DF|| < \sqrt{2}\, h_K$$

D'autre part $\quad |\ \text{grad}\ J\ | \leq \sqrt{2}\ h_K\ \delta_K$

Sans hypothèse sur le maillage, la distance entre les milieux des diagonales δ_K est en $O(h_K)$, ce qui donne la majoration indiquée par le théorème.

Lorsqu'on impose au maillage d'être régulier, pour le traitement des termes de convection, on peut préciser la propriété de tendre vers un parallélogramme. Si la distance δ_K tend vers zéro en $O(h_K^2)$, la norme $|\ \text{grad}\ J\ |$ est inférieure à h_K^3 multipliée par une constante. Si on considère maintenant le quadrilatère $\hat{K}$ de diamètre constant $h_{\hat{K}}$ obtenu par l'homotétie $\hat{F}(x) = \frac{1}{h_K}\, x$ à partir de K. Le quotient de la transformation qui fait passer de $\hat{K}$ à K tend vers zéro. Dans ce cas le terme $(\inf_{\hat{x}\in K} J(\hat{x}))^{-1/2}\ x\ |\ \text{grad}\ J\ |$ est en $O(h^2)$.

Au prix de cette transformation on peut redonner le théorème démontré par Mr. THOMAS (réf. 8 III.35) dans le cas de V_1 et Q_0.

Théorème : Si la famille de triangulation par quadrilatère (Ce) est régulière. Si de plus il existe une constante α, telle que pour tout élément K de $\mathcal{C}_1$, on ait $\delta_K \leq \alpha\, h_K^2$, il existe une constante C indépendante de h telle que pour toute fonction $\vec{v} \in (H^1(\Omega))^2$ vérifient $\text{div}\ \vec{v} \in H^1(\Omega)$.

$$|| \vec{v} - \pi v ||^2_{(L^2(\Omega))^2} \leq C\, h\, (|v|_{1,} + h\, |\text{div}\ v|_{1,\Omega})$$

$$||\text{div}(v - \vec{\pi v})||_{L^2(\Omega)} \leq C\, h\, (\ |\ \text{div}\ v|_{L^2(\Omega)} + |\text{div}\ v|_{1,\Omega})$$

III - LE PROBLEME DISCRETISE

A) Discrétisation des équations - le schéma semi implicite

B) Relation de stabilité sur l'énergie totale

C) Le problème linéarisé : conditions de consistance et stabilité

Dans la première partie, on décrit la façon dont sont utilisés les éléments finis pour discrétiser le problème présenté au chapitre I. Les deux autres parties sont des arguments en faveur du bon comportement du schéma numérique.

A - *DISCRETISATION DES EQUATIONS : SCHEMA SEMI IMPLICITE* -

1°) *Description du problème discrétisé* -

L'écoulement du fluide est décrit par l'ensemble $X = (\rho, P, h, \vec{G})$ des quatre variables

ρ = densité du fluide

P = pression du fluide

h = enthalpie du fluide

$\vec{G}$ = quantité de mouvement du fluide

Le temps t et la position x sont séparés dans cette discrétisation. Une variable $\varphi(x,t)$ est décrite sous la forme :

$$\varphi(x,t) = \sum_{i \in I} \varphi_i(t) \cdot e_i(x)$$

Où les $e_i(x)$, $i \in I$, forment une base de l'ensemble des fonctions en espace auquel on a choisi de faire appartenir la fonction φ.

Le domaine Ω est supposé polygonal, de frontière F divisée en trois parties : $F = Fe \cup Fs \cup Fp$.

Le domaine Ω est maillé avec des quadrilatères. L'ensemble de ces quadrilatères, caractérisé par un pas de discrétisation 1, est noté $\mathcal{C}_1$.

Les variables scalaires, ρ, P, h, sont discrétisés dans l'espace Q_o décrit au chapitre II. Q_o est l'espace des fonctions constantes par

Les variables vectorielles $\vec{G}$ et $\vec{u}$ sont discrétisées dans l'espace V_1 correspondant à Q_o. $\vec{u}$ est la vitesse, formellement $\vec{G}$ et $\vec{u}$ sont liés par $\vec{G} = \rho \vec{u}$.

On est amené à définir une valeur extérieure sur les frontières Fe et Fs pour les variables scalaires. Cette valeur est constante sur chaque arrête de la frontière.

On propose le problème semi-discrétisé suivant :

(P_{11})

Trouver ρ, P, h, $\vec{G}$ définis sur $\Omega \times]0,T[$

ρ, P et h appartiennent à $Q_o \times C_o\ ]0,T[$

$\vec{G}$ appartient à $V_1 \times C_o\ ]0,T[$

Vérifiant les équations suivantes :

$$\forall K \in \mathcal{C}_1 \quad \int_K \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dX + \int_K \operatorname{div} \vec{G}\, dX = 0$$

$$\forall \vec{v} \in V_1 \quad \int_\Omega \frac{\partial \rho u}{\partial t} \cdot \vec{V}\, dX + B(\vec{G},\vec{u},\vec{v}) - \int_\Omega p \operatorname{div} \vec{V}\, dX$$

$$= - \int_F p_{ext}\, \vec{v}.\vec{x}\, dx + \int_\Omega \vec{v}.\vec{F}(\vec{G},\rho,P,h)\, dX$$

$$\forall K \in \mathcal{C}_1 \int_K \frac{\partial}{\partial t}(\rho h - P) + \int_K h \operatorname{div} \vec{G}\, dX + \int_{\partial K^-} \vec{G}.\vec{x}_K (h^+ - h_K)\, ds$$

$$+ \int_K p \operatorname{div} \vec{u}\, dX - \int_{\partial K} \vec{u}.\vec{n}_K . p^+ ds = \int_K S(\vec{G},\rho,P,h)\, dX$$

conditions initiales sur Ω :

$$\rho(x,o) = \rho_o(x),\ h(x,o) = h_o(x),\ P(x,o) = P_o(x),\ \vec{G}(x,o) = G_o(x)$$

conditions aux limites :

sur Fe $= \vec{G}.\vec{n} = g_1(t)$, $h_{ext} = h_1(t)$

sur Fs $= P_{ext} = P_1(t)$

sur F_p $= \vec{G}.\vec{n} = 0$

La relation entre $\vec{G}$ et $\vec{u}$ est explicitée ci-dessous, ainsi que la représentation du terme de convection de quantité de mouvement $B(\vec{G},\vec{u},\vec{v})$.

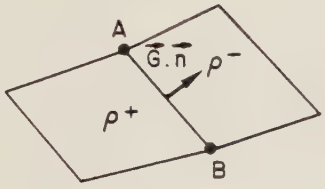
∂K est la frontière de l'élément K, ∂K^- est la portion de ∂K où le débit est entrant, φ^+ est la valeur de la fonction φ en amont de ∂K.

2°) *Relation entre les variables* -

La discrétisation du débit et de la vitesse nécessite d'être explicitée, car la relation qui les lie n'est pas linéaire.

Il a été choisi de discrétiser le débit et la vitesse dans le même espace V_1, pour pouvoir justifier la projection de l'équation de quantité de mouvement sur le champ de vitesse et obtenir l'équation d'évolution de l'énergie cinétique.

L'égalité des vecteurs $\vec{G}$ et $\rho\vec{u}$ dans V_1 se traduit par l'égalité de leurs composantes normales sur les côtés du maillage. Or ρ peut prendre deux valeurs sur un côté. Il est nécessaire de faire un choix. Il a été choisi un décentrement dans le sens du courant.



ρ^+ est la valeur de ρ dans l'élément situé en amont de AB par rapport au débit.

Alors : $\vec{u}.\vec{n} = \vec{G}.\vec{n}/\rho^+$ sur le côté AB.

Cette correspondance redonne un schéma décentré pour la discrétisation de div $\rho\vec{u}$ = div $\vec{G}$ par rapport au champ de vitesses.

On trouve pour un élément K :

$$\int_K \text{div } G \, dX = \int_{\partial K} \vec{G}.\vec{n} \, ds = \int_{\partial K} \rho^+ \, \vec{u}.\vec{n} \, ds \simeq \int_K \text{div } \rho \vec{u} \, dX$$

3°) *Expression du terme de convection de la quantité de mouvement* -

Il faut définir le terme trilinéaire :

$$B(\vec{G},\vec{u},\vec{w}) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial xi} (Gi \; uj) \; wj \; dX$$

Pour cela il est possible de tirer parti des discontinuités des composantes tangentielles, comme cela a été fait par Mr. FORTIN dans le cas des équations de Navier Stokes.

On introduit un décentrement en écrivant :

$$B(\vec{G}.\vec{u},\vec{w}) = \sum_{K \in \mathcal{C}_1} \left[\int_K \frac{\partial}{\partial K_i} (G_i\, u_j)\, w_j \, dX + \int_{\partial K^-} \vec{G}.\vec{n}_K \, (\vec{u}^{++} + \vec{u}^{K}) \, \vec{w} \, ds \right]$$

où ∂K^- est la partie de la frontière de K où le débit est entrant.

$\vec{n}_K$ est la normale extérieure de ∂_K-

$\vec{u}^{++}$ est la valeur du vecteur vitesse en amont de ∂K^-

Lorsque $\vec{w}$ est égal au vecteur vitesse sur Ω, on obtient :

$$B(\vec{G},\vec{u},\vec{w}) = \frac{1}{2} \int_\Omega \vec{u}.\mathrm{div}\,\vec{G}\, dX + \sum_{K \in \mathcal{C}_1} \frac{1}{2} \left[\int_K C_i \left(w_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - u_j \frac{\partial}{\partial x_1} w_j \right) dX \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_C \int_C |\vec{G}.\vec{n}| \, (\vec{u}^{++}\,\vec{w}^{++} + \vec{u}^{--}\,\vec{w}^{--} - 2\,\vec{u}^{++}\,\vec{w}^{--}) \, ds$$

$$B(\vec{G}\,\vec{u},\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_\Omega u^2 \,\mathrm{div}\,\vec{G}\, dX + \frac{1}{2} \sum_C \sum_C |\vec{G},\vec{n}| \times (\vec{u}^{++} - \vec{u}^{--})^2 \, ds$$

Où les C sont les côtés du maillage $\mathcal{C}_1$. Le deuxième terme du second membre est toujours positif ou nul, proportionnel au carré des discontinuités de vitesse. C'est un terme de dissipation. Dans le premier terme div $\vec{G}$ est égal à la dérivée en temps de ρ, ce terme se combine avec la dérivée en temps du débit pour donner la dérivée en temps de l'énergie cinétique.

4°) *Le schéma semi implicite* -

Il faut maintenant calculer les dérivées en temps. Les dérivées en temps sont obtenues en supposant que les quantités ρ, $\rho\vec{u}$, ρh et P ont des variations linéaires en temps. D'autre part, comme cela est fait couramment pour des calculs de ce type, l'équation de continuité et les termes gradients de pression dans l'équation de quantité de mouvement sont évalués implicitement ; le terme trilinéaire lui est évalué explicitement. Dans le cas des problèmes à variations lentes, cela permet d'avoir un pas de temps relativement grand, en regard des constantes de temps liées aux propagations à la vitesse du son. Le problème de la détermination de la solution au nouveau pas de temps reste relativement simple. L'équation d'enthalpie est évaluée de manière totalement implicite (voir chapitre IV sur l'entropie).

On obtient le problème discrétisé approché :

$(P_{1\ 1\Delta t})$

Trouver ρ, ϑ, h, $\vec{G}$ définis sur $\Omega \times]0,T[$

$\mathcal{C}_1$ est le maillage de Ω, Δ_t est le pas de temps, à chaque pas de temps $t = n\Delta t$. ρ^n, P^n, h^n appartiennent à Q_o

$\vec{G}^n$ appartient à V_1

$$\forall K \in \mathcal{C}_1 \quad \int_K \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t}\, dX + \int_K \operatorname{div} \vec{G}^{n+1}\, dX = 0$$

$$\forall \vec{v} \in V_1 \quad \int_\Omega \frac{(\rho^{n+1}\vec{u}^{n+1} - \rho^n \vec{u}^n)}{\Delta t} \times \vec{v}\, dX + B(\vec{G}^n, \vec{u}^n, \vec{v}) - \int_\Omega P^{n+1} \operatorname{div} \vec{v}\, dX$$

$$= - \int_\Omega P_{ext}^{n+1}\, \vec{v}.\vec{n}\, ds + \int_\Omega \vec{v}_o \vec{F}(G^{n+1}, \rho^{n+1}, P^{n+1}, h^{n+1})\, ds$$

$$\forall K \in \mathcal{C}_1 \quad \int_K \frac{1}{\Delta t} (\rho^{n+1} h^{n+1} - \rho^n h^n)\, dX - \int_K \frac{1}{\Delta t} (P^{n+1} - P^n)\, dX$$

$$+ \int_K h^{n+1} \operatorname{div} \vec{G}^{n+1}\, dX + \int_{\partial K^-} \vec{G}^{n+1}.\vec{n}_K\, (h_+^{n+1} - h_K^{n+1})\, ds$$

$$+ \int_K P^{n+1} \operatorname{div} \vec{u}^{n+1}\, dX - \int_{\partial K} \vec{u}^{n+1}.\vec{n}_k \cdot P_+^{n+1}\, ds =$$

$$\int_K S(G^{n+1}, \rho^{n+1}, P^{n+1}, h^{n+1})\, dX$$

conditions initiales

$$\rho^o(x) = \rho_o(x),\ h^o(x) = h_o(x),\ P^o(x) = P_o(x),\ \vec{G}^o(x) = \vec{G}_o(x)$$

conditions aux limites

sur Fe : $\vec{G}^n.n = g_1(n\Delta t)$, $h_{ext}^n = h_1(n\Delta t)$

sur Fs : $P_{ext}^n = P_1(n\Delta t)$

sur Fp : $G^n.n = 0$

B - *ENERGIE TOTALE, CONDITIONS AUX LIMITES* -

Si on étudie les équations semi-discrétisées, en gardant les dérivées en temps, et en utilisant les correspondances entre les diverses équations, on peut retrouver une équation

d'évolution pour une énergie totale sur .

$$E_\Omega = \int_\Omega (\rho h - P + \frac{1}{2} \rho u^2) \, dX$$

En effet, si on projette l'équation de quantité de mouvement sur la vitesse $\vec{u}$ on obtient pour un système sans termes de second membre

$$\int_\Omega (\frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{u}).\vec{u} \, dX + B(G,\vec{u},\vec{u}) - \int_\Omega p \, \mathrm{div}\, \vec{u} + \int_{Pe \cup Ps} P_{ext}.\vec{u}.\vec{\nu} \, ds = \vec{0}$$

$$B(G,\vec{u},\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_\Omega \vec{u}^2 \, \mathrm{div}\, G \, dX + \sum_{C_{intérieur}} \frac{1}{2} \int_C |\vec{G}.\vec{\nu}| \, (\vec{u}^+ - \vec{u}^-)^2 \, ds$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{Fe} \vec{G}.\vec{\nu} \, |u.\nu|^2 \, ds + \frac{1}{2} \int_{Ce} |\vec{G}.\vec{\nu}| \, |u_T|^2 \, ds$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{Fs} \vec{G}.\vec{\nu} \, |u|^2 \, ds$$

Pour des parallélogrammes, on peut faire l'identification entre $\mathrm{div}\, \vec{G}$ et $\frac{-\partial \rho}{\partial t}$. Donc :

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}).\vec{u} \, dX + \frac{1}{2} \int_\Omega u^2 \, \mathrm{div}\, \vec{G} \, dX =$$

$$\sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_K \left[u^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u^2}{\partial t} \right] dX =$$

$$\sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_K \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u^2) \, dX = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} \rho u^2) \, dX$$

En utilisant l'équation d'énergie projetée sur toutes les fonctions caractéristiques d'élément, on obtient l'intégrale sur le domaine Ω

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} (\rho h - P) \, dx + \int_{Fe} G.\nu \, h^+ \, ds + \sum_K \int_{Fs \cap \partial K} G.\nu \, h_K \, ds$$

$$- \int_{Fe} p_{ext} \, \vec{u}.\vec{\nu} \, ds - \sum_K \int_{Fs \cap \partial K} p_K \, \vec{u}.\vec{\nu} \, ds + \int_\Omega p \, \mathrm{div}\, \vec{u} \, dX = 0$$

On obtient

$$\int_{\Omega} dx.\frac{\partial E}{\partial t} + \int_{Fe} \vec{G}.\vec{\nu}\left[h_{ext} + \frac{1}{2}\ u^2_{ext} \right] ds$$

$$+ \sum_K \int_{Fs \cap \partial K} \vec{G}.\vec{\nu}\left[h_K + \frac{1}{2} |u_K|^2 \right] ds +$$

$$+ \sum_K \int_{Fs \cap \partial K} (P_{xt} - P_K)\ \vec{u}_o.\vec{\nu}\ ds = - \sum_C \int_C |\vec{G}.\vec{\nu}|\ (u^+ - u^-)\ ds$$

Ceci donne les conditions naturelles à comparer sur les frontières pour assurer la stabilité de E.

Sur l'entrée Pe de Ω on impose :

- le débit normal G.ν
- la vitesse tangente égale à zéro
- l'enthalpie dynamique $h + \frac{1}{2} \rho u^2$

A la sortie Fs de Ω , il convient d'ajouter une maille fictive sur les côtés ∂K, pour voir que le terme $(p_{ext} - p_K)\ \vec{u}.\vec{\nu}$ n'entraîne pas d'instabilité. Si on écrit le schéma décentré sur cette maille, pour l'évolution de l'énergie interne on trouve : soit e_s la valeur donnée à l'énergie interne sur cette maille fictive :

$$\int_{KS} dx.\frac{\partial es}{\partial t} - \int_{\substack{Fs \cap \partial K_S \\ \cap \partial K}} (P_{xt} - p_K)\ \vec{u}.\vec{\nu}\ ds + \int_{\substack{Fs \cap \partial K_S \\ \cap \partial K}} \vec{G}.\vec{\nu}(h_{K_S} - h_X)\ ds = 0$$

Le terme $P_{xt} - p_K$ se trouve donc éliminé à condition d'envisager l'évolution de l'énergie $E' = E\Omega + \sum_{K_S} \int_{K_S} (\rho_{K_S} h_{K_S} - P_{K_S})\ dX = F\Omega + Es$

On obtient alors $\frac{\partial E'}{\partial t} = \alpha \leq 0$

Les valeurs de h_s et ρ_s au temps précédent étant arbitraires, on obtient :

$$\frac{\partial E\Omega}{\partial t} = \alpha - \rho s\ h_s + P_s$$

Donc pour contrôler la valeur de $\frac{\partial E\Omega}{\partial t}$ il est naturel d'imposer la pression de sortie, le terme $-\rho_s h_s$ étant négatif n'est pas gênant.

Dans ces conditions, on obtient une équation d'évolution de l'énergie totale, avec un terme dissipatif.

Si on utilise un schéma totalement implicite, en projettant l'équation de quantité de mouvement sur les vitesses $\vec{u}^{n+1}$ on obtient exactement :

$$\int_\Omega (\rho^{n+1} h^{n+1} - P^{n+1} + \frac{1}{2} \rho^{n+1} \vec{u}^{n+1^2}) \, dX = \int_\Omega (\rho^n h^n - P^n - \frac{1}{2} \rho^n \vec{u}^{n^2}) \, dX$$

$$- \frac{1}{2} \int_\Omega \rho^n (\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n)^2 \, dX$$

$$- \frac{1}{2} \sum_C \int_C |\vec{G}.\vec{v}| (u^+ - u^-)^{2}_{n+1} \, ds$$

+ termes de bord

Le schéma fait donc apparaître explicitement des termes dissipatifs proportionels aux discontinuités de u.

Pour le schéma semi-implicite, la situation est plus problématique, et on ne peut espérer faire apparaître des conditions que sur des schémas linéarisés.

C - *LE PROBLEME LINEARISE - CONSISTANCE ET STABILITE* -

Dans ce paragraphe on essaie de se faire une idée sur l'implication du choix semi-implicite pour l'existence du solution et la convergence du schéma. Pour cela on considère le problème linéarisé. On suppose que l'écoulement est isentropique, on introduit explicitement cette condition en ne faisant dépendre la masse volumique que de la pression de façon linéaire. On peut écrire :

$\rho = \frac{1}{C^2} p + \rho_o$ où C est une vitesse du son moyenne

On linéarise également le terme de transport des débits, en supposant un champ de vitesse constant.

$B(G^n, \vec{u}^n, \vec{v}) = T(u^*, G^n, v)$ où T est un opérateur de transport suivant la vitesse u^* fixée.

On fait également intervenir une expression linéarisée en fonction du débit du terme de frottement $F(G^{n+1}, \rho^{n+1}, P^{n+1}, \rho^{n+1}) = - F \times \vec{G}^{n+1}$.

On obtient donc pour trouver la solution le problème ρ_1^{n+1} :

P_1^{n+1}

trouver $(\rho^{n+1}, G^{n+1}) \in Q_o \times V_1$ tels que

$$\forall K \in \mathcal{C}_1 \quad \int_K \frac{1}{\Delta t}\ \rho^{n+1}\, dX + \int_K \operatorname{div} G^{n+1}\, dX = \frac{1}{\Delta t} \int_K \rho^n\, dX$$

$$\forall \vec{v} \in V_1 \quad \int_K \left(\frac{1}{\Delta t} + F\right)\ G^{n+1} \cdot \vec{v}\, dx - \int_\Omega c^2\, \rho^{n+1} \operatorname{div} \vec{v}\, dX = \int_\Omega \frac{\vec{G}^n \cdot \vec{v}}{\Delta t}\, dX + T(u^*, G^n, \vec{v}) - \int_{Fs} P_{ext}^{n+1}\, \vec{v}.\vec{n}\, ds$$

G^n et ρ^n sont connus

On se fixe les conditions aux limites

$G.\vec{n} = 0$ sur Fe U Fp

$p = p_{ext}$ sur Fs

Si on peut prouver la consistance et la stabilité, on en déduit dans le cadre linéaire la convergence des solutions.

1°) *Consistance du schéma semi-implicite* -

On voit très facilement que le problème en $(\vec{G}^{n+1}, \rho^{n+1})$ admet une solution unique. En effet, les espaces Q_0 et V_1 vérifient les hypothèses H_1 et H_2 définies dans le chapitre II.B. On écrira la forme bilinéaire

$$B(\rho, \vec{v}) = -\int_\Omega \rho \operatorname{div} v\, dX = (B'\rho\ ,\ \vec{v}) = (\rho, B\vec{v}) \qquad \begin{matrix} \rho \in Q_o \\ \vec{v} \in V_1 \end{matrix}$$

Et il existe une constante k indépendante du maillage telle que

$$|| B'\rho ||_{V1'} \geq k\ || \rho ||_{Q_o}$$

D'autre part sur chaque élément K, $B_{\vec{v}}$ est constante et égale à

$$B_{\vec{v}} = \frac{1}{\text{Aire K}} \cdot \int_K \operatorname{div} \vec{v}\ dX$$

Si le maillage $\mathcal{C}_1$ est régulier au sens défini au chapitre II, il existe une constante $\sigma > 0$, indépendante du pas l telle que :

$\vec{B_v} \geq G \operatorname{div} \vec{v}$, donc $\int_\Omega \vec{B_v} \cdot \vec{B_v} \, dX \geq \sigma^2 \int_\Omega (\operatorname{div} v)^2 \, dX$

En éliminant ρ^{n+1} dans le système on obtient une équation sur G^{n+1}

$$\forall v \in V_1 \int_\Omega (\frac{1}{\Delta t} + F).\vec{G}^{n+1} + \vec{v} \, dX + \Delta t.c^2 \int_\Omega B \vec{G}^{n+1}. B\vec{v} \, dX = \frac{1}{\Delta t} (G^n, v)$$

$$+ T(u^*, T^n, v)$$

$$+ \int_\Omega \rho^n . B_v \, dX$$

$$= (O \, G^{n+1}, \vec{v})$$

F est par hypothèse positif, l'opérateur $(O \, G^{n+1}, v)$ est donc linéaire, continu et symétrique défini positif.

$$(O \vec{v}, \vec{v}) \geq (\frac{1}{\Delta t} + F) \; ||v||^2_{L^2} + \Delta t \, C^2 \sigma^2 \; ||\operatorname{div} v||^2_{L^2}$$

$$\geq \operatorname{Min} \left[(\frac{1}{\Delta t} + F) \, , \, \Delta t \, C^2 G^2 \right] \; ||v||^2_{H(\operatorname{div},\Omega)}$$

Donc le système admet une solution unique en G^{n+1}, on trouve ensuite une solution unique en ρ^{n+1} par l'équation : $\rho^{n+1} = \rho^n + \Delta t \, . \, B.\vec{G}^{n+1}$ dans Q_o.

Supposons que sur $\Omega \times]\, 0, t \,[$, il existe une solution lipschitzienne du problème. On peut vérifier que l'erreur sur la solution calculée en Δt par le schéma est en $O(\Delta t + \Delta x)$ ou Δt est le pas en temps, Δx est le pas en espace du maillage.

La solution étant lipschitzienne en temps, au pas de temps n+1

$$(\frac{\partial \rho}{\partial t})_{n+1} = \frac{1}{\Delta t} (\rho^{n+1} - \rho^n) + O(\Delta t)$$

et

$$(\frac{\partial G}{\partial t})_{n+1} = \frac{1}{\Delta t} (G^{n+1} - G^n) + O(\Delta t)$$

La solution réelle vérifie donc un système

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(\rho^{n+1}, q) + (\operatorname{div} G^{n+1}, q) = \frac{1}{\Delta t}(\rho^n, q) + O(\Delta t) \quad \forall q \in Q_0 \\ \left(\frac{(1+F)}{\Delta t}\vec{G}^{n+1}, \vec{v}\right) - (\operatorname{div}\vec{v}, \rho^{n+1}).C^2 = \frac{1}{\Delta t}(\vec{G}^n, \vec{v}) + T(u^*, \vec{G}^n, \vec{v}) \cdot O(\Delta t) \quad \forall \vec{v} \in V_1 \end{cases}$$

D'autre part d'après les théorèmes d'interpolation, l'enterpolée G^*, ρ^* de la solution réelle dans les espaces V_1 et Q_0 est telle que

$$|(G^* - G^{n+1}, \vec{v})| < C\,\Delta x \qquad \forall v \in V_1$$

$$|(\operatorname{div}\vec{G}^{n+1} - \vec{G}^*, q)| < C\,\Delta x \qquad \forall q \in Q_0$$

$$|(\rho^{n+1} - \rho^*, q)| < C\,\Delta x \qquad \forall q \in Q_0$$

D'autre part, on peut vérifier que le terme de transfert

$$T(u^*, G, v) = \sum_{K \in \mathcal{C}_1} \left[\int_K \frac{\partial}{\partial x_i}(u^* G)\, v_j + \int_{\partial k^-} \vec{u}^*.\vec{n}\,(\vec{u}^+ - u^-)\,\vec{v}\, ds \right]$$

est une approximation en $o(h)$ de $\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(u^* G)\, v_j\, dx$

Donc l'interpolée (G^*, ρ^*) de la solution vérifie un système :

$$\begin{cases} \forall K \in \mathcal{C}_1 \quad \int_K \frac{\rho^*}{\Delta t}\, dX + \int_K \operatorname{div} G^*\, dX = \frac{1}{\Delta t}\int_K \rho^n\, dX + \int_K o(\Delta t + \Delta x)\, dx \\ \forall v \in V_1 \quad \int_K \left(\frac{1}{\Delta t} + F\right) G^*.v - \int_K C^2 \rho^* \operatorname{div}\vec{v} = \frac{1}{\Delta t}\int_\Omega \vec{G}^n\vec{v} + F(u^*, G^n, v) \\ \qquad\qquad + \int_\Omega \vec{O}(\Delta t + \Delta x) \cdot \vec{v}\, dx \end{cases}$$

Comme on a vu que l'opérateur qui porte sur (ρ^*, G^*) et (ρ^{n+1}, G^{n+1}) est continu par rapport au second membre, on obtient

$$\begin{cases} \rho^{n+1} = \rho^* + O(\Delta t + \Delta x) \\ \vec{G}^{n+1} = \vec{G}^* + O(\Delta t + \Delta x) \end{cases}$$

Comme ρ^* et G^* sont les interpolées de la solution (ρ,G) on obtient

$$(\rho^{n+1}, G^{n+1}) = (\rho^*, G^*) + O(\Delta t + \Delta l)$$

où $O(\Delta t + \Delta l)$ est un terme petit dans la norme de $L^2(\Omega) \times M(div,\Omega)$.

2°) *Stabilité du schéma semi-implicite* -

On peut l'étudier dans le cadre linéaire. La pression dépend linéairement de la masse volumique : $p = c^2 \rho$ et le terme de transport est linéarisé autour d'une vitesse u^*.

Ayant discrétisé le problème sur les espaces Q_h et V_h on résoud le problème (P).

Trouver ρ^{n+1} et G^{n+1} tels que :

$$\begin{cases} \rho^{n+1} + \Delta t\ B.G^{n+1} = \rho^n \quad \text{dans } Q_h \\ G^{n+1} - \Delta t\ C^2\ B'\ \rho^{n+1} = G^n + \Delta t\ T_{u^*} \cdot G^n \text{ alors } V_h \end{cases}$$

Avec les relations

$$B(\rho,G) = \int_\Omega B\ G.\rho\ dX = \int_\Omega G.B'\rho\ dX = \int_\Omega div\ G.\rho\ dX$$

et

$$(T_{u^*} G, v) = \int_\Omega \sum_{j=i} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i^* G_j) \cdot v_j\ dX$$

On va chercher à expliciter une relation de stabilité sur les normes dans $L^2(\Omega)$ de G et ρ.

Pour cela on projette dans $L^2(\Omega)$ l'équation de quantité de mouvement sur G^n. On obtient :

$$(G^{n+1},G^n) = (G^n,G^n) + \Delta t\ C^2\ (B'\ \rho^{n+1}, G^n) - \Delta t\ (T_{u^*} G^n, G^n)$$

On transforme (G^{n+1}, G^n) :

$$(G^{n+1}, G^n) = (G^{n+1}, G^{n+1}) - (G^{n+1}, G^{n+1} - G^n)$$

$$(G^{n+1}, G^{n+1} - G^n) = \Delta t\, C^2\, (B'\rho^{n+1}, G^{n+1}) - \Delta t\, (T_{u^*} G^n, G^{n+1})$$

$$(T_{u^*} G^n, G^{n+1}) = (T_{u^*} G^n, G^n) + \Delta t\, C^2\, (B'\rho^{n+1}, T_{u^*} G^n)$$

$$- \Delta t\, (T_{u^*} G^n, T_{u^*} G^n)$$

On obtient en définitive la relation :

$$|G^{n+1}|^2_{L^2} = |G^n|^2_{L^2} + \Delta t\, C^2 \left[(B'\rho^{n+1}, G^n) + (B'\rho^{n+1}, G^{n+1}) \right]$$

$$- 2\Delta_t\, (T_{u^*} G^n, G^n)$$

$$+ \Delta t^2\, (T_{u^*} G^n, T_{u^*} G^n)$$

$$- \Delta^2 t\, C^2\, (B'\rho^{n+1}, T_{u^*} G^n)$$

On projette maintenant de même l'équation de conservation de la masse successivement sur ρ^{n+1} et ρ^n dans $L^2(\Omega)$:

a) $(\rho^{n+1}, \rho^n) = (\rho^n, \rho^n) - \Delta t (G^{n+1}, B'\rho^n)$

$$(\rho^{n+1}, \rho^n) = (\rho^n, \rho^n) - \Delta t\, (G^{n+1}, B'\rho^{n+1}) - \Delta t^2\, (G^{n+1}, B'.CB\, G^{n+1})$$

$$= (\rho^n, \rho^n) - \Delta t\, (G^{n+1}, B'\rho^{n+1}) - \Delta t^2\, (B.CG^{n+1}, B\, G^{n+1})$$

b) $(\rho^{n+1}, \rho^{n+1}) = (\rho^n, \rho^{n+1}) - \Delta t\, (G^{n+1}, B'\rho^{n+1})$

$$= (\rho^n, \rho^{n+1}) - \Delta t (G^n, B'\rho^{n+1}) - \Delta_t^2\, C^2 (B'\rho^{n+1}, B'\rho^{n+1})$$

$$+ \Delta t^2\, (T_{u^*} G^n, B'\rho^{n+1})$$

On obtient en faisant la somme :

$$|\rho^{n+1}|^2_{L^2} = |\rho^n|^2_{L^2} - \Delta t \left[(B'\rho^{n+1}, G^n) + (B'\rho^{n+1}, G^{n+1}) \right]$$

$$- \Delta t^2 (B G^{n+1}, B G^{n+1})$$

$$- \Delta t^2 C^2 (B'\rho^{n+1}, B'\rho^{n+1})$$

$$+ \Delta t^2 (T_{u^*} G^n, B' \rho^{n+1})$$

On obtient donc le résultat final :

$$|G^{n+1}|^2_{L^2} + C^2 |\rho^{n+1}|^2_{L^2} + C^2 \Delta t^2 \left[B G^{n+1}, B G^{n+1} \right]$$

$$= |G^n|^2_{L^2} + C^2 |\rho^n|^2_{L^2} - 2\Delta t (T_{u^*} G^n, G^n) + \Delta t^2 (T_{u^*} G^n, T_{u^*} G^n)$$

$$+ C^2 \Delta t^2 [BG^n, BG^n] - C^2 \Delta t^2 [BG^n, BG^n] - \Delta t^2 C^4 (B'\rho^{n+1}, B'\rho^{n}$$

Alors :

a) si la dissipation introduite dans la discrétisation du terme $T_{u^*} G$ est suffisante pour

$$(1) \quad (T_{u^*} G, G) \geq K (T_{u^*} G, T_{u^*} G)$$

On peut obtenir une condition de stabilité en comparant $-2\Delta t (T_{u^*} G^n, G^n) + \Delta t^2 (T_{u^*} G^n, T_{u^*}$

On trouverait ici $\Delta t < 2 K$

Malheureusement la discrétisation éléments finis mixte n'introduit pas assez de dissipati pour obtenir une stabilité sur le terme explicite. En effet, si par exemple on traite un écoulement incompressible on obtient :

$$(T_{u^*} G^n, G^n) = \sum_{j \in C} |u| (G^{n+} - G^{n-})^2 \, dj$$

où C représente l'ensemble des côtés du maillage. Mais si par exemple on part du champ de vecteur $G_x = 1 - x$, $G_y = y$, à divergence nulle, sur un maillage rectangulaire en x,y $T_{u^*} G = \nabla \frac{1}{2} u^2$ n'est pas nul mais $(T_{u^*} G, G)$ est nul.

Pour obtenir la relation (1), il faut faire une discrétisation du type différences finies décentrées avec des discontinuités sur les deux composantes.

b) Avec une discrétisation continue seuls les termes dissipatifs du second ordre $\Delta t^2 c^2 (B G^{n+1}, B G^{n+1})$ peuvent stabiliser le schéma.

A plusieurs dimensions (div G, div G) n'est pas une norme, donc sous cette forme le schéma n'est pas stable.

A une dimension, pour un pas de discrétisation Δx, si on a discrétisé T_{u^*} de telle sorte que $(T_{u^*} G^n, G^n) = 0$ on trouve

$$c^2 \Delta t^2 (B G, B G) \geqslant K c^2 \Delta t^2 |G|^2_{L^2}$$

et $$\Delta t^2 (T_{u^*} G^n, T_{u^*} G^n) \leqslant \Delta t^2 \times |\mathrm{Sup}\ (u^*)|^2 \times K |G|^2_{L^2}$$

Donc le schéma est stable si $\mathrm{Sup}\ |u^*| \leqslant C$. Pour un écoulement subsonique.

Dans la pratique on ajoutera un terme dissipatif évalué au temps n+1 dans l'équation de quantité de mouvement, noté par un opérateur M, tel que $(MG,G) \geqslant m (G)^2_{L^2}$.

L'équation devient :

$$(1 + \Delta t\ M)\ G^{n+1} - \Delta t\ c^2\ B'\ \rho^{n+1} = G^n\ .\ \Delta t\ T_{u^*} G^n \text{ dans } V_h.$$

Posons $A = 1 + \Delta t\ M$

La relation obtenue dans ce cas est :

$$(A G^{n+1}, A G^{n+1}) + c^2 |\rho^{n+1}|^2_{L^2} = |G^n|^2_{L^2} + c^2 |\rho^n|^2 - 2\Delta t (T_{u^*} G^n, G^n)$$

$$+ \Delta t^2 (T_{u^*} G^n, T_{u^*} G^n)$$

$$- \Delta t^2 c^2 (\mathrm{div}\ G^{n+1}, \mathrm{div}\ G^{n+1})$$

$$- \Delta t^2 c^2 (B' \rho^{n+1}, B' \rho^{n+1})$$

Pour un petit pas de temps, à l'ordre 0 (Δt) il faut donc comparer :

$$2(M\, G^{n+1},\, G^{n+1}) \text{ à } 2(T_{u^*}\, G^n,\, G^n) \text{ pour être assuré de la stabilité.}$$

Si M est un opérateur de viscosité il faut qu'une relation du type

$$\nu\, \frac{1}{\Delta x^2} > u^*\, \frac{1}{\Delta x} \qquad \text{soit} \quad \Delta x < \frac{K}{u^*}$$

Le schéma semi-implicite avec les éléments finis est donc stable si il y a suffisamment de dissipation introduite dans les termes autres que le terme de transport. Ces considérations montrent qu'il est donc souhaitable, soit d'utiliser une formulation totalement implicite, soit de décentrer le schéma dans les deux directions.

Dans ce cas, on recrée des différences décentrées. Alors on est placé dans le premier cas, il y a une condition de stabilité sur le pas de temps.

IV - ETUDE DE L'ENTROPIE DU SYSTEME

A) Généralités

B) L'entropie fonction d'état

C) Essais de vérification d'une condition d'entropie du système

A - *GENERALITES* -

La non linéarité des équations entraîne la possibilité d'obtenir plusieurs solutions. Pour une analyse théorique du problème de Cauchy non linéaire, je me rapporterai à la thèse de Mr. LEROUX (réf. 21).

Lors de l'étude d'un écoulement transonique, on observe des chocs, des lignes de discontinuité pour les variables descriptives du fluide. On sait, par des arguments de conservation, écrire des relations entre les valeurs des paramètres de part et d'autre du choc. Ce sont les relations de Rankine-Hugoniot (réf. 2). Pour une discontinuité se déplaçant à la vitesse s dans la direction $\vec{x}$, ces relations sont les suivantes :

Si on se place dans le référentiel se déplaçant à la vitesse du choc, on obtient :

$$\vec{G}_1.\vec{x} = \vec{G}_2.\vec{x}$$

$$u_{1T} = u_{2T}$$

$$P_1 + \rho_1 u_{1_x}^2 = P_2 + \rho u_{2x}^2$$

$$h_1 + \frac{1}{2}\rho u^2 = h_2 + \frac{1}{2}\rho u^2$$

On peut remarquer avec Mr. LEROUX, que ces relations sont symétriques, ce qui est la principale cause de non-unicité des solutions. Il est nécessaire d'imposer une condition plus restrictive aux discontinuités. C'est la condition d'entropie. En suivant les travaux de Mr. KRUZKOV (réf. 28), Mr. LEROUX (réf. 21) Mr. TAI PING LIU (réf. 29), on peut pousser le formalisme mathématique dans deux cas.

(1) $u_t + \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i(u))_{x_i} = 0$ $\varphi_i(u) \in C^1$, u à valeurs dans R est une application de R^n dans R

(2) $u_t + F(u_x) = 0$ $\quad F(p) \in C^1$, n = 1, il est une application de R dans R^p, $\frac{\partial F}{\partial u}$ a des valeurs propres réelles.

Mr. KRUSKOV définit une condition d'entropie et un théorème d'unicité. Je rappelerai simplement les résultats dans le cas monodimensionnel.

Position du problème (P) :

$$(P) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}(u,x,t) + g(u,x,t) = 0 \qquad u \text{ à valeurs dans } R \quad t \quad]\,0,T\,[\\ \\ \text{conditions initiales : } (ux,o) = u_o(x) \qquad\qquad x \in R' \end{array} \right.$$

f et g satisfont de bonnes hypothèses de régularité (voir Mr. LEROUX (réf. 21)).

Définition -

Une fonction u L^s (R x]0,T[est dite solution faible du problème (P), lorsque pour toute fonction $\phi \in C_o^2$ (R x]0,T[u vérifie :

$$\int_R \int_0^T \{u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u,x,t) \text{ grad } \phi - g(u,x,t)\,\phi\}\, dx\, dt = - \int_R u_o(x)\phi\,(x,o)\, dX$$

Ces solutions vérifient la condition de Rankine-Hugoniot le long des courbes de discontinuité. Ces courbes ont pour équations

$$\frac{dX}{dt} = \frac{f\left[u(x+o,t)\right] - f\left[\,u(x-o,t)\,\right]}{u(x+o,t) - u(x-o,t)}$$

On construit très facilement des exemples montrant qu'elles ne sont pas uniques. Pour lever l'indétermination, l'idée est de choisir la solution provenant du passage à la limite de problèmes plus réguliers P_ε où on a introduit un terme de viscosité $-\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x}$. La valeur de ε tend vers zéro.

Les travaux de Mr. KRUSKOV montrent que l'on peut passer à la limite, que cette limite est unique, qu'elle est solution faible du problème sans viscosité. De plus, cette solution est caractérisée par une condition, dite condition d'entropie, ou condition d'Oléïnik.

Condition d'entropie :

Si u^+ et u^- sont les valeurs de u à gauche et à droite de la discontinuité, si I est l'intervalle des valeurs $]\,u^+, u^-\,[$

$$\frac{f(u^+ - f(u^-)}{u^+ - u^-} = \underset{k \in I}{\text{Max}} \left[\frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - k} \right]$$

Cette méthode ne peut s'étendre au cas d'un système dans R^2. Pour un système, on peut citer la méthode de Mr. TAI PING LIU (réf. 29) appliquée à un système de n loi de conservations. Soit par exemple le problème P_2 :

$$P_2 \quad \begin{cases} u_t + \frac{\partial}{\partial x} f(u,v) = 0 \\ u_t + \frac{\partial}{\partial x} g(u,v) = 0 \end{cases} \qquad -\infty < x < +\infty \qquad t \geq 0$$

où u, v, f, g appartiennent à $C^2(U)$ pour un ouvert de R^2 : U. et supposons que le système soit strictement hyperbolique, c'est-à-dire que d(f,g) a deux valeurs propres réelles et distinctes $\Omega_1 < \Omega_2$ en tout point de U.

Mr. TAI PING LIU introduit la notion d'admissibilité d'une solution, si on peut trouver un chemin liant les états de part et d'autre d'une discontinuité.

Au passage des discontinuités, les solutions faibles vérifient les conditions de Rankine Hugoniot et on définit (u^-, v^-, u^+, v^+)

$$\sigma(u^-, v^-, u^+, v^+) = \frac{f(u_+, v_+) - f(u^-, v^-)}{u_+ - u_-} = \frac{g(u_+, v_+) - g(u^-, v^-)}{v_+ - v_-} = \frac{dX}{dt}$$

Mr. TAI PING LIU caractérise la solution admissible unique par la propriété (E) d'entropie dans le cas du système :

(E) $\sigma(u^-, v^-, u^+, v^+) \leq \sigma(^-, v^-, u, v)$ pour tout couple (u,v) sur la courbe de choc passant par (u^-, v^-) entre (u^-, v^-) et (u^+, v^+).

Appliquant ces résultats à un problème de dynamique des gaz, Mr. TAI PING LIU montre que la condition d'accroissement de l'entropie dans le sens du courant, telle qu'elle est connue en physique, est contenue dans la condition (E).

Ce sont ces considérations que sont à l'origine de nombreux schémas explicites (Mr. GODUNOV (26), M. GLIM (24), M. BRAM VAN LEAR (25)).

Notre propos sera plus modeste, on vérifie d'abord que le schéma de convection de l'énergie permet de forcer l'entropie à ne pas décroître dans le sens du courant, au passage entre l'élément. L'entropie est ici l'entropie physique correspondant aux équations d'état du fluide. On essaie ensuite de montrer que dans le cas subsonique, cette condition est

est suffisante pour que le problème discrétisé admette une seule solution.

B) *ENTROPIE, FONCTION D'ETAT* -

L'entropie est une fonction thermodynamique, liée au second principe de Carnot, qui indique que, lors d'une transformation d'un système isolé, l'entropie du système ne peut que croître.

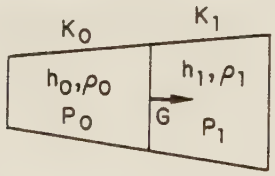
Etudions d'abord l'évolution d'un fluide idéal, non visqueux, divariant (on peut écrire $h = f(\rho, P)$) , dans un écoulement adiabatique continu, le long d'un tube de courant, tel que cela est fait dans le cours de Mr. CARRIERE (réf. 2).

Si v est la vitesse, ρ la masse volumique, h l'enthalpie, et S l'entropie, on peut écrire le long du tube :

$$\begin{cases} v\,dv + \dfrac{dP}{\rho} = 0 \\ v\,dv + dh = 0 \end{cases}$$

On a de plus la relation thermodynamique $TdS = dh - \dfrac{dP}{\rho}$. Ces trois équations entraînent $dS = 0$, on vérifie ainsi que l'écoulement est isentropique, la transformation est réversible, il n'y a pas de dissipation. Lorsque des termes dissipatifs interviennent ou lors du passage d'un choc on trouve $T\,dS > 0$, l'entropie croît en suivant la ligne de courant.

Que fait le schéma numérique à l'ordre 0 ? Supposons tout d'abord, que le fluide soit en écoulement stationnaire, tel que dans la maille K, il rentre par une seule face, on suit un tube de courant.



Si on choisit les vitesses dans le même espace que les débits, avec la discrétisation donnée au chapitre précédent, on obtient :

$$\int_{K_1} h_1 \operatorname{div} \vec{G}\, dX + \int_{\partial K_1^-} G_n (h_1 - h_0)\, ds + \int_{K_1} P_1 \operatorname{div} u + \int_{\partial K_1} u.n\ P^+\, ds = 0$$

en tenant compte de div G = 0

On obtient $$h_1 - h_0 - \frac{P_1 - P_0}{\hat{\rho}} = 0$$

Le lieu (Δ) sur lequel se trouve P, $\tau = 1/\rho$, dépend de la valeur de $\hat{\rho}$. Si on choisit $\hat{\rho}$ tel que $\frac{1}{\hat{\rho}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_0}\right)$ on trouve la courbe d'Hugoniot. Ce choix peut être bon lors d'une compression, car on retrouve dans ce cas que l'entropie de l'état 1 est plus forte que celle de l'état 0. De plus (H) et (S) ontun contact d'ordre impair en P_0 et $1/\rho_0$. On en conclu que pour deschocs (dans le shéma numérique pour des compressions), on fait une erreur

du 3ème ordre sur la pression et que l'entropie augmente.

Ce ne peut être valable pour une détente. Par contre si on utilise un décentrement total, on donne à ρ la valeur ρ_0, on peut vérifier que l'entropie de l'état 1 est plus forte que celle de l'état 0. En effet, supposons une suite de deux transformations faisant passer de 0 à 1.

La première transformation sera isentropique. On passe de l'état 0 à l'état A, où le fluide est à la pression P_1. On a deux relations :

$$\int_0^A T\,ds = 0 \Rightarrow \int_0^A dh - \int_0^A \frac{dP}{\rho} = 0 \Rightarrow h_A = h_0 + \int_0^A \frac{dP}{\rho}$$

Or, à entropie constante ρ est une fonction croissante de P, on en déduit donc que

$$\int_0^A \frac{dP}{\rho} \leq \frac{P_1 - P_0}{\rho_0}$$

Donc $$h_A \leq h_1 = h_0 + \frac{P_1 - P_0}{\rho_0}$$

Donc, au cours de la transformation qui fait passer de A à 1, à pression constante P_1 :

$$\int_A^1 T\,ds = \int_1^A dh = h_1 - h_A \geq 0$$

Comme on est à pression constante T est fonction de s seul et T est une fonction positive, donc ds est positive.

Donc la courbe (0) $$h_1 - h_0 - \frac{P_1 - P_0}{\rho_0} = 0$$

est au-dessus de l'isentrope (S). Elle est d'ailleurs au-dessus de (H), même pour une compression. On peut constater aussi, qu'en faisant cela le fluide s'est échauffé (ce qui n'est pas le cas pour la courbe d'Hugoniot). L'apport de chaleur est :

$$dQ = \int_0^1 T\,ds = h_A - h_0 = \frac{1}{2}\,(P_1 - P_0) \times \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1}\right)$$

Si dans le schéma numérique, on combine la courbe (o) et la courbe (H), on peut limiter les apports de chaleur dans le cas d'une détente.

Regardons maintenant ce que cela donne pour une discrétisation en temps et en espace de l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h - P) + \operatorname{div} \vec{G} h - \vec{u}\,\vec{\nabla} p = 0$$

Elle est discrétisée sur une maille K, de manière implicite en temps. Supposons que le débit rentre dans K par l'ensemble des faces $\sum_{\alpha \in I} \partial K_\alpha$. Soit n l'indice du temps.

$$\left[\frac{\rho^{n+1} h^{n+1} - \rho^n h^n}{\Delta t} - \frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} \right] \times \text{Aire } K + h^{n+1} \int_K \operatorname{div} \vec{G}^{n+1} \, dX$$

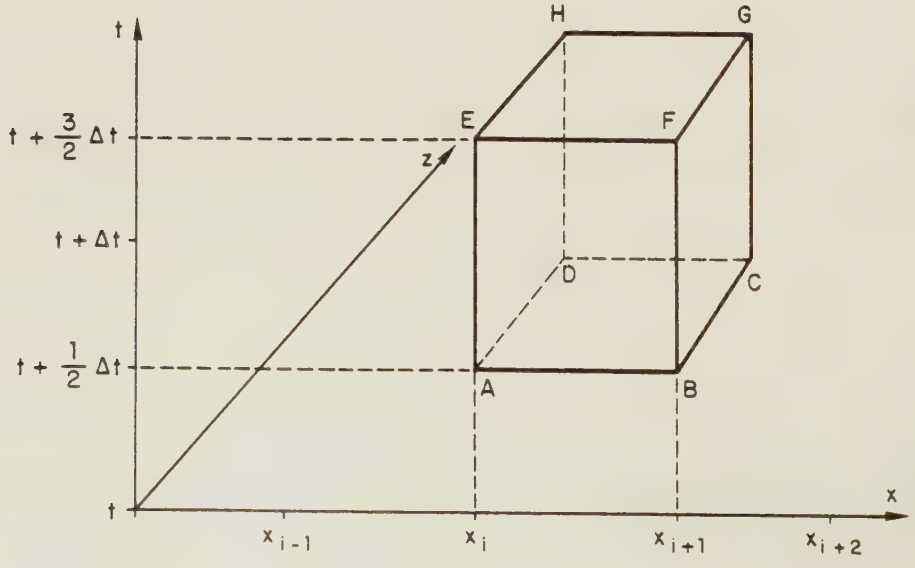
$$+ \sum_{\alpha \in I} \int_{\partial K_\alpha} \left[G^{n+1} \cdot (h^{n+1} - h_\alpha^{n+1}) - u^{n+1} (P^{n+1} - P_\alpha^{n+1}) \right] ds = 0$$

Si on donne à u^{n+1} la valeur $G^{n+1}/\hat{\rho}^{n+1}$ définit précédemment sur chaque face, on obtient :

$$\frac{\rho^{n+1} - \text{Aire } K}{\Delta t} \left[h^{n+1} - h^n - \frac{p^{n+1} - p^n}{\rho^n} \right] + \sum_{\alpha \in I} D_K . G^{n+1} \left[h^{n+1} - h_\alpha^{n+1} - \frac{p^{n+1} . p_\alpha^{n+1}}{\hat{\rho}^{n+1}} \right] = 0$$

$D\alpha$ longueur du côté α.

Interprétation géométrique - On définit un maillage spatio-temporel en x, y, t



L'élément considéré est la boîte formée par translation de l'élément de R^2 ABCD parallèlement à l'axe du temps. On obtient l'élément ABCDEFGM autour du temps $t+\Delta t$. L'équation discrétisée plus haut est une équation de conservation dans l'espace (x,y,t). Il rentre dans l'élément pour l'exemple considéré, trois masses de fluide. Les quantités $D_\alpha\ G^{n+1}\ a \in I$, et $\frac{\rho^{n+1} + \text{Aire K}}{\Delta t}$ peuvent être interprétées comme les débits entrant dans la maille et s'y mélangeant immédiatement pour se mettre à la même pression P^{n+1} et la même enthalpie h^{n+1}.

Dans ce cas, si on choisit $\hat{\rho}$ comme dans le cas monodimensionnel pour la courbe d'Hugoniot, on ne peut rien dire. Il faut donner à $\tilde{\rho}$ la valeur décentrée ρ^+. Alors pour toutes les masses entrantes on peut passer par une transformation isentropique les amenant à la pression P^{n+1}. Puis par un mélange à pression constante donnant l'enthalpie unique de l'état final.

Au cours de la première transformation pour chaque masse , par rapport à l'état A on a

$$\int_0^{A\alpha} \frac{dP}{\rho} \leq \frac{P - P_L}{\rho_0 \alpha} \qquad \text{pour la transformation isentropique.}$$

On obtient $$h_A\alpha - h_0\alpha \leq \frac{P - P_L}{\rho_0\ \alpha}$$

Donc :

$$\alpha\sum m_\alpha\ (h - h_0\alpha) \geq \sum_\alpha\ m_\alpha\ (hA_\alpha - ho_\alpha)$$

Donc : $$h \geq \sum_\alpha \frac{m_\alpha\ hA}{M}\alpha = h^*$$

h^* est l'entropie du mélange à pression constante. Cette transformation étant irréversible, l'entropie du système a augmenté. On s'aperçoit ensuite que h est supérieur à h^*, il y a apport de chaleur à pression constante donc accroissement de l'entropie du mélange.

La chaleur apportée est $$dQ = \sum_{d \in I} m_\alpha\ (P - P_\alpha) \times \frac{1}{2}\ (\frac{1}{\rho_\alpha} - \frac{1}{\rho}\ )$$

Remarque -

Si on veut diminuer ce caractère dissipatif, dans le cas des gaz où l'isentrope se trouve sous la corde reliant deux de ses points (ce n'est malheureusement pas le cas pour un fluide diphasique). On peut remplacer $\frac{P - P_\alpha}{\rho_2}$ par

$$(P-P_\alpha) \times 1/2 \times (\frac{1}{\rho_1^*(p)} + \frac{1}{P_\alpha}\ )$$

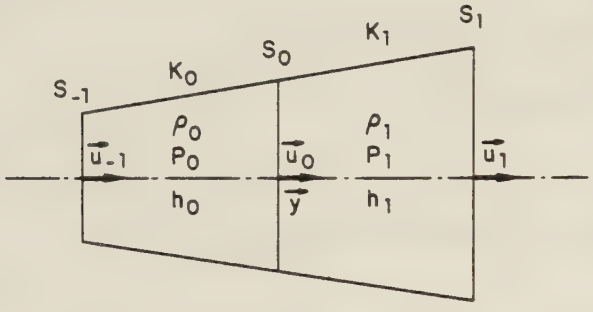
Où on aura calculé $\rho^*(\ )$ par la transformation isentropique de P_α à P connaissant P_α, h_α, P et l'équation d'état du gaz. Cela suppose cependant des itérations alors que

le schéma décentré est direct.

3°) *Cas stationnaire* -

La condition précédente assure que les transformations que subit le fluide sont bien physiques, mais elle n'assure pas l'unicité de la solution. On peut s'en convaincre sur l'exemple monodimensionnel suivant.

Supposons que les deux mailles K_0 et K_1 aient le même pas Δx en x, et sont symétriques autour de l'axe des x.



Le débit $\vec{g}$ est tel que
$gS = ct = G$

On projette l'équation sur le vecteur de base $\vec{v}$, valant 1 sur la section S_0, 0 sur les autres sections.

Le terme $\quad -\int p \operatorname{div} \vec{v}\, dx \quad$ donne $(p_2 - p_0) \cdot S_0$

Pour calculer $\int gi \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j)\, v_j\, dx$, il est commode d'utiliser la transformation qui sert à définir les vecteurs. Comme les mailles sont symétriques autour de l'axe des x, seules les dérivées en x interviennent. En tenant compte de la géométrie très particulière des mailles, on se rapporte au carré unité, ce qui donne :

$$\int_K v_j \; gi \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j)\, dX = \int_{\hat{K}} \hat{v}_j \; G \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{u}_j \; d\hat{x}$$

avec les relations :

$$\begin{cases} \hat{u}_x = u_0 \dfrac{S_0(1-x)}{S_0 + x(S_1 - S_0)} + u_1 \dfrac{S_1\, x}{S_0 + x\, \Delta_S} & 0 \leq x \leq 1 \\ \hat{u}_y = y \cdot \dfrac{S_1 - S_0}{\Delta x}\; \hat{u}_x & -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Delta S = S_1 - S_0$ $\qquad$ X_1 valeur de droite

X_2 valeur de gauche

On trouve en projetant l'équation sur v

$$\int Gi \frac{\partial u}{\partial x_i} \; v \, dx = \frac{1}{2} G(u_1 - u_{-1}) \left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta S}{\Delta x}\right)^2\right) \quad \text{si}$$

Si $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ est constant. Alors il n'y a pas de discontinuité des vitesses tangentielles.

En utilisant le décentrement u = g/ρ+ on obtient la relation linéaire entre P et 1/ρ :

$$P_1 - P_0 = \frac{1}{2} \frac{G'^2}{S_0} \left(\frac{1}{\rho_1 S_1} - \frac{1}{\rho_{-1} S_{-1}}\right) = 0 \qquad G' = G.\sqrt{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta S}{\Delta x}\right)^2}$$

$$P_1 - P_0 = - \frac{1}{2} g'^2 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_{-1}} \frac{S_1}{S_{-1}} \right) \qquad g' = \frac{G'}{\sqrt{S_0 S_1}}$$

Cette équation relie la pression et la masse volumique de la maille K_1, à la pression de la maille K_0, et la masse volumique de la maille K_{-1} en amont de K_0. La pente de cette droite est $- \frac{1}{2} g'^2$, pour obtenir une pente correspondant à la valeur du débit, il faut écrire ces relations pour deux points consécutifs. On obtient une droite d'impulsion reliant des valeurs moyennes en espace ce qui correspond au schéma. Si on avait utilisé un schéma supposant les vitesses discontinues on aurait obtenu :

$$P_1 - P_0 = - g^{1/2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0} \frac{S_1}{S_{-1}}\right)$$

Maintenant on suit la discussion effectuée par M. CARRIERE dans son cours (réf. 2) à propos des chocs. Ici on approxime un écoulement continu par une succession d'état discontinu. Suivant sa discussion, on raisonne dans le diagramme P, $\frac{1}{\rho}$. D'après les résultats précédents, le point K_1 se trouve à l'intersection de deux liens déterminés à partir des conditions amont.

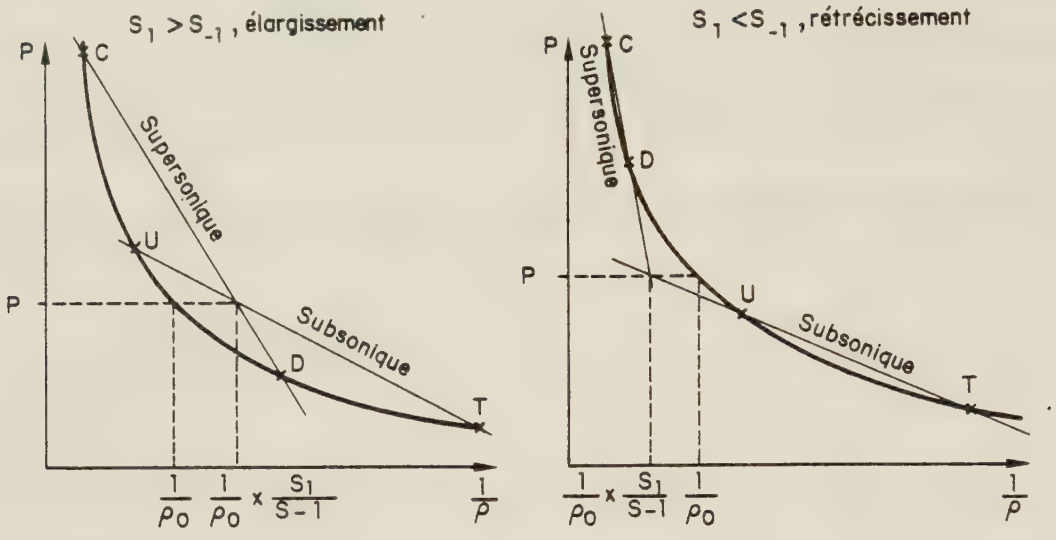
- la courbe (M) déterminée par l'équation $h - h_0 = \frac{P - P_0}{\rho_0}$

  au point K_0, sa pente est la même que celle de l'isentrope : $- \rho^2 C^2$

- une droite d'impulsion négative :

$$P_1 - P_0 = - \frac{1}{2} g^2 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_{-1}} \frac{S}{S_{-1}}\right)$$

Supposons que $\rho_{-1} = \rho_0$ on obtient deux cas.



Les solutions proches donnent l'évolution correcte du fluide lors d'un écoulement continu.

Cas supersonique : | détente dans un divergent
| compression dans un convergent

Cas subsonique : | compression dans un convergent
| détente dans un convergent

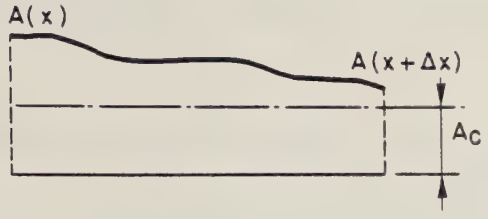
Dans le cas supersonique la solution éloignée correspond à un choc.

Dans le cas subsonique, le point éloigné correspond à un choc de détente non physique.

Les solutions doubles sont obtenues pour une courbe H convexe. Ceci est le cas pour les gaz.

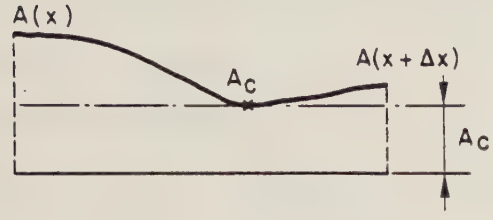
On peut remarquer aussi que la possibilité de solutions doubles n'a rien d'étonnant pour un schéma numérique. En effet, celui-ci traduit bien le fait d'une variation de section, mais il travaille avec des variables discontinues, et il ne traduit pas le fait que la variation de section est monotone.

Or ceci est essentiel, le simple calcul d'un écoulement isentropique dans une tuyère montre qu'entre un point en x, et un point en $x+\Delta x$ quelque soit Δx, on peut trouver deux solutions en $x+x$ suivant les variations de la section sur $]\, x,\ x+\Delta x\, [$.



Cas 1
subsonique en x
subsonique en x + Δx

La section A est restée supérieure à la section critique AC.



Cas 2
subsonique en x
supersonique en x + Δx

La valeur de la section est passée par AC.

4°) *Cas stationnaire : discussion* -

L'exemple précédent montre que la condition sur l'entropie n'est pas suffisante. Il faut en ajouter une autre. Dans notre cas, cela peut être une condition indiquant la continuité de la solution.

Proposition -

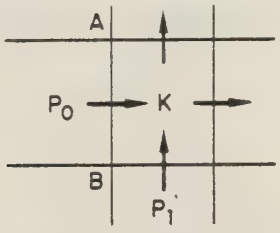
Dans le cas monodimensionnel, en supposant que la courbe H est convexe, soit D la pente de la droite d'impulsion négative, soit $\rho^2 C^2$ la pente de la tangente à (H) en K_0, alors seul le point d'intersection où la pente de la tangente est supérieure à D si $\rho^2 C^2$ est supérieure à D (inférieure à D si $\rho^2 C^2$ est inférieure à D) peut être considéré comme admissible.

En effet à une dimension, la pente de la droite d'impulsion $\frac{1}{2} G^2 \left(1 + \frac{\Delta S}{\Delta x}\right)$ est constante lorsque Δx tend vers 0. Si on veut que l'écoulement soit continu, la droite d'impulsion se déplace parallèlement à elle même pour passer par K_0. Si (M) est convexe il n'y a que deux points d'intersection. Soit U le point satisfaisant à la condition, par continuité U tend vers K_0. Soit I, le point n'y satisfaisant pas . Les courbes étant continues, il existe entre I et K_0 un point I" où la tangente a pour pente D. Donc I ne peut passer cette limite.

Ce critère implique que si un écoulement est "subsonique" en K_0, la solution U est "subsonique". En effet, la courbe (M) traverse les isentropiques, donc au point U la pente de (H) est inférieure à celle de l'isentropique. Donc la pente de D est inférieure à $\rho^2 C^2$ en U, (ici "subsonique" ou "supersonique" correspond à une comparaison des pentes de la droite d'impulsion avec $\rho^2 C^2$, mais n'implique pas nécessairement la définition naturelle).

Le cas multidimensionnel est plus compliqué, les débits peuvent varier sous la contrainte $\mathrm{div}\ \vec{G} = 0$. Une condition déjà introduite pour des écoulements isentropiques, réf.) est d'imposer une condition sur le gradient de pression dans le sens du courant. Avec le schéma utilisé (réf. 18) la condition était $\nabla p > -\infty$. Ici il faut imposer $\nabla P > -M$, en se rapportant à une condition de type "subsonique" pour un écoulement subsonique, en égalant les débits. La condition sera plus sévère que dans le cas monodimensionnel.

Prenons l'exemple d'un maillage rectangulaire, sur la maille K, le débit entre par deux côtés :



En projetant l'équation de quantité de mouvement sur la fonction $\vec{v}$ correspondant au côté AB, on obtient une droite donnant $P - P_0$ en fonction de $\frac{1}{\rho}$ avec une pente B.

$$D = \left(\frac{G_X \, G_{X+\Delta x}}{2} + \frac{G_X \, (G_{X+\Delta x} - G_X)}{3} \right) + \frac{1}{2} \, G_X \, G_Y$$

Cette pente D fait intervenir les débits transverses.

D - INSTABILITE LINEAIRE DES SOLUTIONS "SUPERSONIQUES" -

Dans de nombreux cas monodimensionnels, passés jusqu'à présent, la solution supersonique n'est jamais apparue. Cela peut être expliqué par la procédure itérative utilisée.

Supposons que pour l'état stationnaire, la solution s'écarte de δP sur une maille.

La méthode linéarisée cherche la solution par une méthode d'évolution. Elle indique des variations de pression et de débit telles que :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\Delta t} + \text{div } \partial \vec{G}$$

$$\frac{\partial G}{\Delta t} + \nabla \partial P = - \frac{\partial}{\partial x_i} G^2/\rho$$

Dans ce cas, d'après les graphiques, pour une variation de pression, le second membre varie dans un coefficient $k > 1$ comme $k \nabla \partial P$. La méthode ne peut donc converger sur un état où la pente de la droite d'impulsion négative est plus forte que celle de la tangente à l'équation d'état décentrée (Δ) à partir de l'état P_0, $1/\rho_0$.

V - DESCRIPTION DU CODE

A) Description générale

B) Algorithme de résolution

C) Mise en oeuvre des éléments finis

C) Calcul des seconds membres

E) Les équations en coordonnées cylindriques

Avant de passer à la présentation de quelques résultats numériques, ce chapitre expose les choix pratiques qui ont été faits. L'algorithme de résolution, en particulier, doit être étudié pour réduire la taille des systèmes à inverser.

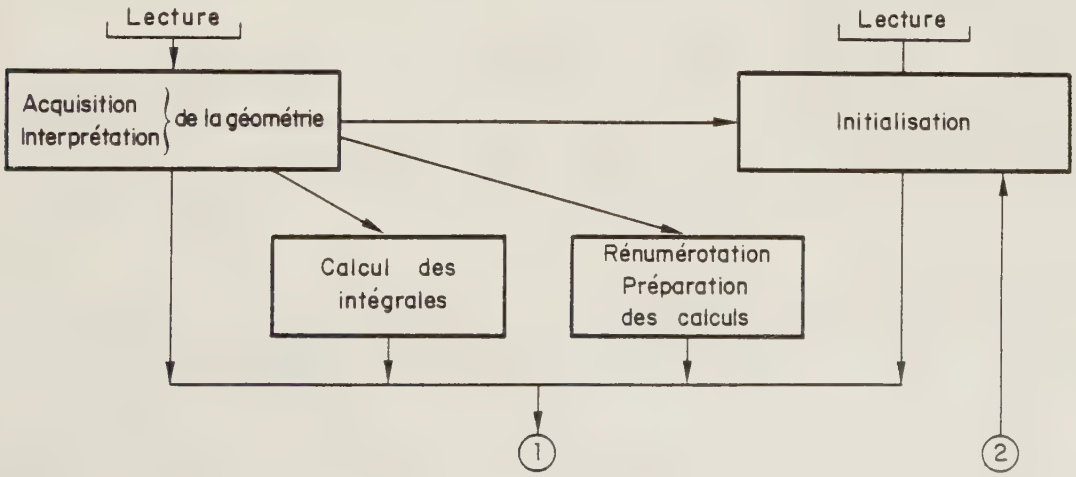
A - *DESCRIPTION GENERALE* -

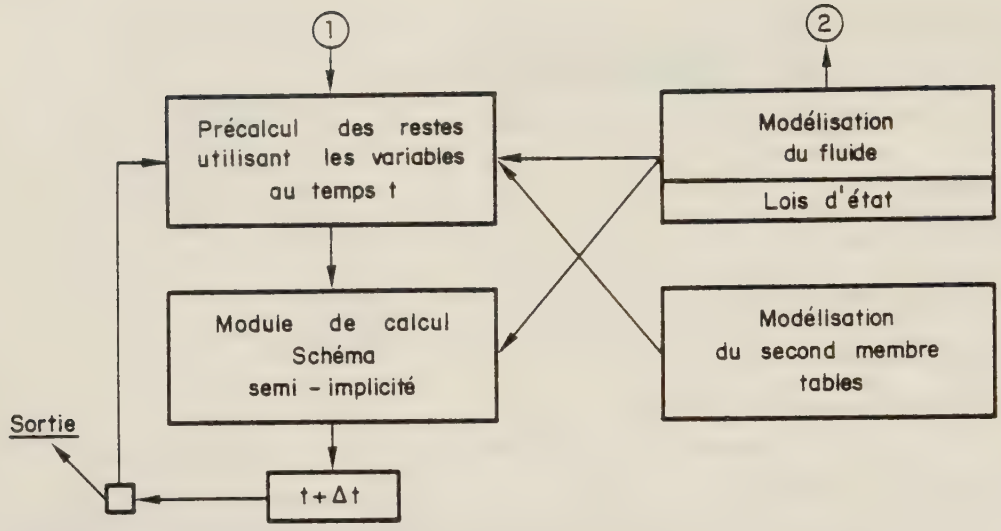
Le programme traite le système des trois équations du schéma semi implicite décrites au chapitre III, en tenant compte de termes dissipatifs au second membre, frottements et flux de chaleur.

Le programme utilise les variables densité, pression, enthalpie, et quantité de mouvement comme variables principales. On lui fourni les lois d'état du fluide sous forme de fonctions de la pression et de l'enthalpie.

La discrétisation utilisée est décrite au chapitre III. Le domaine de calcul est donc un ouvert polygonal de R^2, maillé par des quadrangles. Le programme part d'une solution initiale et de conditions aux limites imposées que l'on peut faire varier au cours du temps.

On peut donner un organigramme général du programme sous la forme suivante :





B - ALGORITHME DE RESOLUTION DU SCHEMA SEMI IMPLICITE -

Pour un système bidimensionnel, une méthode de Newton-Raphson portant sur toutes les variables en bloc a été écarté, en raison de la trop grande taille du système à inverser. De plus, on peut envisager dans le futur d'ajouter des inconnues au système, représentant des déséquilibres non pris en compte dans le modèle homogène. Cela rendrait encore plus prohibitif l'utilisation d'une méthode globale.

En fait, le schéma semi-implicite se prête bien à une méthode itérative où la variable pression couple les différents points de l'espace, les autres variables sont calculées localement. La méthode présentée est une adaptation au cas des éléments finis, de schémas itératifs déjà utilisés avec succès dans les calculs d'écoulements diphasiques à une dimension (réf. 30).

1°) *Description de la méthode itérative* -

Dans le cas du schéma semi implicite, on considère que le problème est une perturbation du problème linéarisé sur le débit et la pression traité au chapitre III. On raisonne donc par rapport à ces deux variables.

De plus, pour éviter de créer numériquement des pertes de masse au cours du temps, on n'élimine pas directement la masse volumique en fonction de la pression et de l'enthalpie, par l'équation d'état du fluide. La masse volumique au temps n+1 est calculée pour l'équation de continuité :

$$\rho^{n+1} = \rho^{n} - \Delta t \, . \, \mathrm{div} \, \vec{G}^{n+1}$$

Le test de convergence est la différence RN entre cette valeur ρ^{n+1} et la valeur donnée par l'équation d'état.

$$RN = \rho^{n+1} - f(P^{n+1}, h^{n+1})$$

On voit donc que l'équation d'état n'est vérifiée qu'à la précision demandée. Par contre la masse présente dans le circuit est conservée.

Si on considère la méthode à l'itération α , on connait P^{α}, G^{α}, L^{α}et ρ^{α}. Mais ces quantités ne vérifient pas exactement les équations.

On a :

$$f(P^{\alpha},k^{\alpha}) - \rho^{n} + \Delta t \ \mathrm{div}\ G^{\alpha} = - R_N^{\alpha} = - (\rho^{\alpha} - f(P^{\alpha},k^{\alpha}))$$

$$G^{\alpha} - G^{n} + \Delta t \ \vec{\nabla} P^{\alpha} + \Delta t \ F(G^{\alpha}) = R_1^{\alpha}$$

$$\rho^{\alpha} h^{\alpha} - p^{\alpha} - \rho^{n} h^{n} + P^{n} + \Delta t \ \mathrm{div}\ \vec{G}^{\alpha} k^{\alpha} - \vec{u}^{\alpha}.\Delta t.\vec{\nabla} p^{\alpha} + \phi(P^{\alpha},k^{\alpha}) = R_2^{\alpha}$$

On cherche alors une estimation de l'accroissement δP^{α}, pour obtenir la pression : $P^{\alpha+1} = P^{\alpha} + \delta P^{\alpha}$, en se plaçant dans le cadre linéarisé où la masse volumique $\tilde{\rho} = f(P,h)$ ne dépend plus que de la pression. On estime $(\frac{\partial \rho}{\partial p})^{*}$ par les équations :

$$\delta\tilde{\rho} = (\frac{\partial f}{\partial p})_{h=ct} \delta P + (\frac{\partial f}{\partial h})_{p=ct} \delta h$$

$$\rho \frac{\delta h}{\Delta t} - \frac{\delta P}{\Delta t} = (\frac{\partial \phi}{\partial h}) \delta h$$

En éliminant la variation de débit entre l'équation de quantité de mouvement et l'équation de continuité, on obtient une équation elliptique sur l'incrément de pression :

$$(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial p})^{*} \times \frac{1}{\Delta r} \times \delta P^{\alpha} - \mathrm{div}(\Delta t \ \vec{\nabla}\delta P^{\alpha}) = \frac{R\tilde{N}^{\alpha}}{\Delta t} - \Delta t \ \mathrm{div}\ R_1^{\alpha}$$

Lorsqu'on a obtenu δP^{α}, on calcule l'accroissement δG^{α} du débit, en linéarisant le terme de frottement $\vec{F}(\vec{G})$.

$$(\frac{1}{\Delta t} + \frac{\partial F}{\partial G}) \ . \ \delta G^{\alpha} = R_1^{\alpha} - \vec{\nabla} \ \delta P^{2}$$

δG^{α} est estimé localement, la matrice représentant $(\frac{1}{\Delta t} + \frac{\partial F}{\partial G})$ est approchée par une matrice

diagonale. Ceci explique qu'il y ait un reste dans l'équation de quantité de mouvement à chaque itération. Il est tenu compte de ce reste dans l'équation d'incrémentation de la pression par le terme Δt div R_1.

On déduit ensuite les autres paramètres de l'écoulement à l'itération $\alpha + 1$.

Densité	$\rho^{\alpha+1} = \rho^n - \Delta t \text{ div } \vec{G}^{\alpha+1}$
Vitesse	$u^{\alpha+1} = G^{\alpha+1}/\rho^{\alpha+1}$
Enthalpie	$(\frac{\rho^{\alpha+1}}{\Delta t} + \text{div } G^{\alpha+1}) \cdot \delta h^{\alpha} =$ reste de l'équation d'énergie

Connaissant $P^{\alpha+1}$, et $h^{\alpha+1}$ on peut évaluer l'écart entre les densités obtenues par équation $f(P^{+1}, h^{+1})$ et celles obtenues par l'équation de continuité : $RN = \rho^{\alpha+1} - f(P^{\alpha+1}, h^{\alpha+1})$.

Si RN est supérieur à la valeur choisie, il sert de nouveau second membre à l'équation d'incrémentation de pression. Sinon on estime que l'on a approché la solution à l'instant nH.

Un résumé des différentes étapes de la résolution est donné dans le tableau ci-contre.

2°) *Discussion sur la convergence de cette méthode* -

On a écarté des termes jugés petits dans la méthode décrite. On utilise donc une méthode itérative de la forme :

$$A \, \delta X^{\alpha} = - (A+B) \, X^{\alpha-1} + R$$

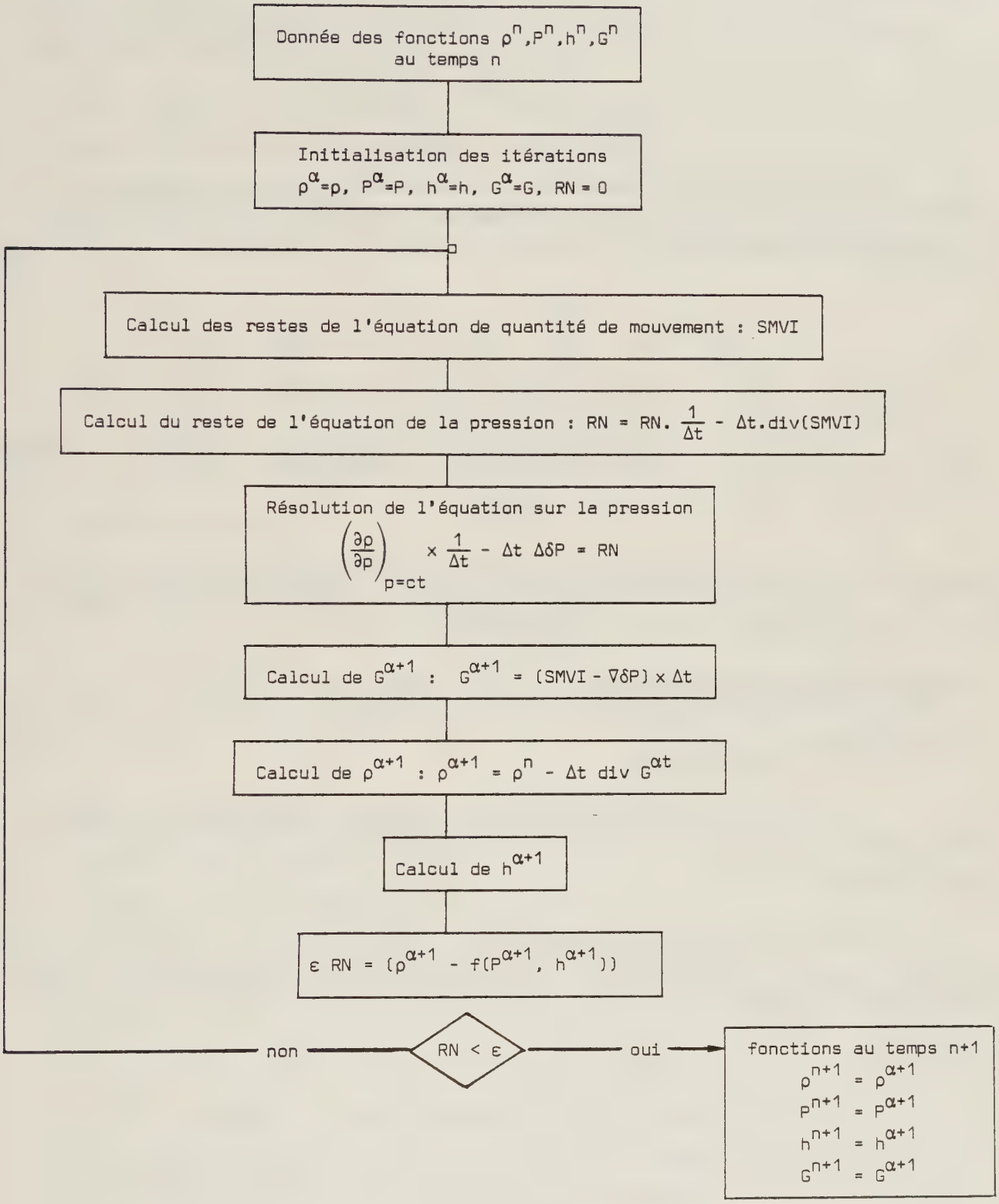
pour résoudre une équation $(A+B) X = R$

Par le théorème du point fixe, pour que la méthode converge vers la solution, il faut que la norme de l'opérateur A soit supérieure à celle de l'opérateur B. Si on excepte les effets de la linéarisation de l'équation d'état et de l'équation de quantité de mouvement, il faut donc que les perturbations non prises en compte dans l'équation de conservation d'énergie ne soient pas trop grandes.

L'évaluation du terme $\frac{\partial \rho}{\partial p}$ est faite en supposant l'équation d'énergie explicite. Si l'écoulement était isentropique, et l'équation d'énergie calculée exactement, on aurait $\delta h = \frac{d}{\rho} \delta P$, relation valable localement partout entre les variations de l'enthalpie et de la pression. On pourrait donc établir effectivement une dérivée locale de la masse volumique en fonction de la pression.

Dans le schéma, l'équation de conservation d'énergie est calculée de manière implicite, on ajoute donc une variation d'entropie (voir chapitre V). Dans une maille du fait de la discrétisation, on introduit un échauffement, donc une augmentation de l'enthalpie égale à : $\sum_{i \in I^+} \frac{1}{2} (\Delta P) \, \Delta(\frac{1}{\rho}) . \Delta t$ (chapitre V). I^+ représente l'ensemble des côtés où le débit entre.

DESCRIPTION DES ITERATIONS



ΔP et $\Delta \frac{1}{\rho}$ sont les sauts de pression et de volume massique au travers de ces côtés.

On introduit donc une perturbation de masse volumique dans le second membre par maille de l'ordre de :

$$\delta\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial h}\right)_{p=ct} \delta h^{*} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial h}\right) * \sum_{i \in I^{+}} \frac{1}{2} (\Delta P) \cdot \Delta\left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot \Delta t$$

On compare cela avec la valeur du $\delta\rho$ obtenue pour une variation de pression : $\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)^{*} \delta P$. $\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)^{*}$ est une estimation de la dérivée de ρ tenant compte des termes locaux. Il faut donc que sur chaque maille :

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)^{*} \geqslant \Delta t \times \sum_{i \in I^{+}} \left(\left|\frac{\Delta P}{P}\right| \cdot \left|\Delta \frac{1}{\rho}\right| \cdot \left| \frac{\partial\rho}{\partial h}\right| \right)$$

Ceci introduit une condition de pas en temps maximum pour la convergence de l'algorithme. Cette condition dépend de la régularité de l'écoulement, elle peut être éventuellement plus stricte qu'une condition de stabilité du schéma lui même.

Dans la pratique, les écoulements calculés représentent des phénomènes d'évolution relativement lente, les nombres d'itérations observées pour une erreur relative en masse de 10^{-6} sont de l'ordre d'une dizaine d'itérations.

C - *MISE EN OEUVRE DES ELEMENTS FINIS* -

1°) *Description de la géométrie* -

Le maillage $\mathcal{C}_1$ du domaine Ω est formé de quadrangles. Lorsqu'on veut le raffiner, il faut le rendre régulier (voir le chapitre III) et faire tendre les quadrangles vers des parallélogrammes.

La frontière F de Ω peut être découpée en F_1 entrée, F_s sortie, F_p paroi. Le maillage doit être compatible avec le découpage de la frontière. Soit K un élément du maillage, soit K' un de ses côtés on doit avoir :

soit :
- K' intérieur à Ω
- K' appartient à F_e
- K' appartient à F_s
- K' appartient à F_p

Le programme fait intervenir parallèlement, les types d'intégrales suivants :

- l'aire de l'élément

- l'intégrale de la divergence d'un vecteur sur l'élément
- l'intégrale du produit scalaire de deux vecteurs
- l'intégrale du terme trilinéaire de convection de la quantité de mouvement
- l'intégrale de la projection d'un vecteur unitaire de direction fixe sur les vecteurs de base (cette direction donne les forces de gravité).

Il faut également calculer l'intégrale sur un côté du maillage, du produit scalaire de deux vecteurs, ceci intervient pour le calcul du terme trilinéaire.

Pour ce faire, il est intéressant de générer un certain nombre de tableaux lors de l'interprétation de la géométrie. Principalement, en plus de la numérotation des sommets on utilise

- une numérotation des côtés
- une orientation de référence de chaque côté est choisie, un tableau donne les deux éléments correspondent à un côté dans l'ordre donné par cette orientation
- un code est attribué à chaque côté indiquant sa place.

2°) *L'intégration numérique* -

Les intégrales correspondant au produit scalaire et au terme trilinéaire sont calculées par intégration numérique sur l'élément de référence.

Le vecteur de base $V(x)$ sur l'élément courant K est obtenu par la transformation contravariante à partir du vecteur de base $\hat{V}(\hat{x})$ défini dans $\hat{K}$. On peut définir un troisième vecteur $\tilde{V}(\hat{x})$ dans $\hat{K}$ tel que $V(x) = \tilde{V}(\hat{x})$.

Alors les formules de changement de coordonnées donnent :

$$\int_K \overline{V}(x) \cdot U(x)\, dX = \int_{\hat{K}} \tilde{V}(\hat{x}) \cdot \tilde{U}(\hat{x}) \cdot J_K(\hat{x})\, d\hat{X}$$

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_K U_j(x) \cdot V_i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (W_j(x)\, dX = \sum_{i,j=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} \int_{\hat{K}} \tilde{U}_j(\hat{x}) . \tilde{V}_i(\hat{x})\, B_{il}(\hat{x}) \frac{\partial}{\partial x_l} (W_j(\hat{x}))\, d\hat{X}$$

où B_{il} sont les termes de la matrice Jacobienne

J_K est le déterminant de cette matrice.

La méthode d'intégration numérique utilisée est une méthode de Gauss-Legendre. On choisit M points d'intégration ξ_m dans $\hat{K}$ associés aux coefficients α_m. La formule d'intégration donne :

$$\int_K \phi_{(\hat{x})} \, d\hat{X} \simeq \sum_{m=1}^{M} \phi(\xi_m) \times \alpha_m$$

On impose au choix de la formule, d'être exacte dans le cas affiné, et d'être au moins d'ordre 2 en précision.

D'autre part les dérivées du vecteur $\tilde{W}(\hat{x})$ font intervenir les dérivées d'une fraction rationnelle $1/J_K$. Ces dérivées ont été estimées numériquement.

La formule choisie a été une formule à 3 points de Gauss dont on donne les coefficients sur [0,1].

ξ_m	α_m
. 5	. 4444444444
.5 ± 27459669 241483	.277777777

L'intégration numérique est utilisée également pour le calcul des termes de bord :

$$\int_{\partial K} \vec{W}.\vec{n} \; . \; \vec{u}.\vec{v} \; ds$$

Etant donné que $\vec{w}.\vec{n}$ est une fonction constante sur chaque côté, on utilise une formule d'intégration de Gauss-Legendre à deux points, dont les abscisses sur] 0,1 [, ainsi que les coefficients valent

ξ_m	α_m
. 5 ± .288675 134593813	. 5

3°) *Discrétisation de l'équation sur la pression* -

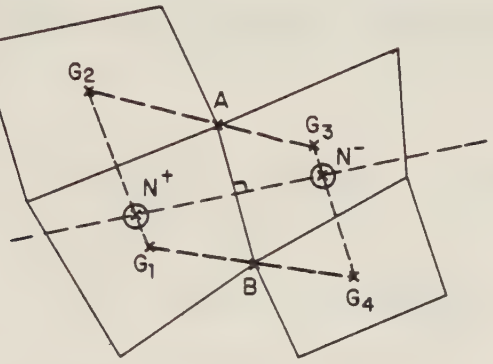
La méthode itérative fait apparaître l'équation suivante sur la pression :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)^{*} \times \frac{1}{\Delta t} \delta P - \operatorname{div} (\Delta t \, \vec{\nabla} \, \delta P) = R$$

Cette équation est bien conditionnée, mais la discrétisation par éléments discontinus n'est pas adoptée. On en fait donc une approximation discrète sous la forme :

$$\forall \varphi_K \ , \ K \in \mathcal{C}_1 \ \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)^* \ . \ \frac{1}{\Delta t} \ . \ \text{Aire K} \ \delta P - \Delta t \int_{\partial K} \frac{\partial P}{\partial n} \ . \ \varphi_K \ ds = \text{Aire K} \ . \ R$$

K est un élément du maillage $\mathcal{C}_1$, φ_K sa fonction caractéristique. Il faut donc donner une estimation de la dérivée normale $\frac{\partial P}{\partial n}$ au bord de chaque élément. Pour cela, on défini, de part et d'autre des frontières entre éléments, une approximation linéaire de P.



Si G_1 et G_3 sont les centres de gravité des quadrilatères de part et d'autre de AB, on utilise les points N^+ et N^-, intersections de la médiatrice de AB avec les segments $G_1\ G_2$ et $G_3\ G_4$ sont les centres de gravité de quadrilatères adjacents, à l'opposé de la médiatrice. On estime

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{P^+ - P^-}{\overline{N^+ N^-}}$$

P^+ et P^- sont les moyennes barycentriques de P entre G_1 et G_2, et $G_3\ G_4$. Cette approximation s'est révélée suffisante pour résoudre les équations d'incrémentation de pression.

D - TRAITEMENT DES TERMES DU SECOND MEMBRE -

1°) Frottements sur le milieu -

Il est tenu compte dans l'équation de quantité de mouvement d'un vecteur de forces de frottements sur le milieu, constant par élément. Ce vecteur est mis sous la forme :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_X \\ F_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} TF_{XX} & TF_{XY} \\ TF_{YX} & TF_{YY} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{G}_X \\ \tilde{G}_Y \end{pmatrix} = \overline{\overline{TF}} \ . \ \tilde{G}$$

La matrice $\overline{\overline{TF}}$ est constante par élément, c'est une fonction de l'élément et de l'état du fluide. Elle pourrait être théoriquement quelconque, les seuls cas utilisés jusqu'à présent ont été des matrices diagonales.

Le vecteur $\tilde{\vec{G}}$ est une valeur moyenne de la quantité de mouvement dans la maille, il dépend donc des quatre degrés de liberté de $\vec{G}$ sur la maille. Le $\tilde{\vec{G}}$ utilisé est la valeur de $\vec{G}$ au barycentre de la maille.

2°) *Représentation de la gravité* -

C'est la force de gravité $\rho\vec{g}$ dans l'équation quantité de mouvement. La direction de $\vec{g}$ étant fixée une fois pour toute avec la géométrie, un tableau d'intégrales correspondant à sa direction est assemblé. Il suffit donc de lui appliquer la valeur de ρ calculée par élément.

3°) *Flux de chaleur* -

Dans l'équation d'énergie, le terme source est calculé par élément de la façon suivante :

$$\int_K S \, dX = \tilde{\phi} \int_K dX$$

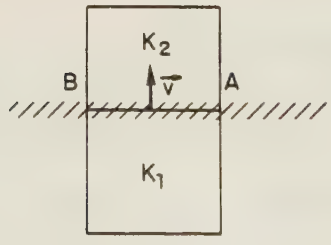
$\tilde{\phi}$ est une valeur moyenne du flux de chaleur sur K. La fonction $\tilde{\Psi}$ dépend de l'élément, de l'état du fluide et de la valeur moyenne de la quantité de mouvement calculée comme pour le frottement.

4°) *Pertes de charge singulières* -

On est amené à représenter un écoulement passant à travers des grilles. L'épaisseur des grilles et la grandeur des trous qui les traversent sont trop faibles pour pouvoir être représentées géométriquement dans le maillage.

Dans la discrétisation, on fait correspondre la grille aux côtés du maillage. La grille est alors modélisée , par une intégrale de surface affectée d'un certain coefficient, qui intervient dans l'équation de quantité de mouvement et qui est appelée perte de charge singulière.

Supposons que la grille soit en AB.



On ajoute lors de la projection de l'équation de quantité de mouvement sur la fonction de base correspondant au côté AB un terme

$$-\int_A^B K \cdot \rho^+ \cdot u_\nu \cdot u_\nu \, ds$$

où u_ν est la composante normale de u sur AB. La valeur de K est constante par côté.

E - NORMALISATION DES EQUATIONS -

Les variables qui interviennent en thermohydraulique, ont des ordres de grandeur totalement différents dans leurs unités respectives.

Exemple

vitesses	: 1 à 10 m/s
masses volumiques	: 10 à 10^3 kg/m^3
pression	: 10 à 200 x 10^5 Pa
enthalpies	: 1 à 3 x 10^6 J/kg

Ces variables interviennent souvent par leur gradient dans les équations. Pour éviter les erreurs dues aux différences de grands nombres, et aussi pour avoir des coefficients de même grandeur dans toutes les équations, les variables sont normalisées :

PR	: pression de référence
VR	: vitesse de référence
ROR	: masse volumique de référence
ROR x VR^2	: pression dynamique de référence
HR	: enthalpie de référence
ρ	: XR x ROR
P	: XP x ROR x VR^2 + PR
$\vec{G}$	: XG x ROR x VR
H	: XH x HR

On obtient ainsi un système d'équations normalisées portant sur les variables XP, XH, XR, $\vec{XG}$.

Equation de masse :

$$\frac{1}{VR}\frac{\partial}{\partial t} XR + \operatorname{div} \vec{XG} = 0$$

Equation de quantité de mouvement :

$$\frac{1}{VR}\frac{\partial}{\partial t} XG_j + \sum_{i=I}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{XG_i\, XG_j}{XR} + \frac{\partial}{\partial x_j} XP = XR \cdot \vec{\gamma} + \vec{F}'$$

Equation d'énergie :

$$\frac{1}{VR}\frac{\partial}{\partial t}\left(XR.XH - \frac{VR^2}{HR} \cdot \frac{\partial}{\partial t} XP\right) + \operatorname{div}\left(\vec{XG}.XH\right) - \vec{XU}.\vec{\nabla}XP \cdot \frac{VR^2}{HR} = S'$$

F - EQUATIONS EN GEOMETRIE CYLINDRIQUE -

Il a été ajouté au programme, la possibilité d'effectuer les calculs avec les équations en géométrie (r,z) à symétrie cylindrique, en utilisant les mêmes éléments.

Les équations traitées sont :

Equation de masse :

$$r \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial r} r G_r + \frac{\partial}{\partial z} r G_z = 0$$

Equation de quantité de mouvement :

$$r \frac{\partial}{\partial t} \rho u_r + \frac{\partial}{\partial r} r u_r u_r \rho + \frac{\partial}{\partial z} r u_z u_z \rho + r \frac{\partial}{\partial r} p = r \vec{F}r$$

$$r \frac{\partial}{\partial t} \rho u_z + \frac{\partial}{\partial r} r u_r u_z \rho + \frac{\partial}{\partial z} r u_z u_z \rho + r \frac{\partial}{\partial z} p = r \rho g_2 + r \vec{F}_z$$

Equation de conservation d'énergie :

$$r \frac{\partial}{\partial t} (\rho h - P) + \frac{\partial}{\partial r} r \rho u_r h + \frac{\partial}{\partial z} r \rho u_z h - r u_r \frac{\partial P}{\partial r} - r u_z \frac{\partial P}{\partial z} = r,S$$

u_r et u_z sont les deux composantes de la vitesse. G_r et G_z sont les deux composantes du débit.

Sans démonstration sur les propriétés de ces équations, on voit que si $r\rho$, P, h sont définis dans l'espace Q_h, $\vec{u}$ et $r\vec{G}$ dans l'espace V_h, on obtient les mêmes systèmes d'équations discrétisées en (r,z) que en (x,y).

VI - TESTS NUMERIQUES

A) Tests analytiques

- tube à choc
- écoulement concentrique

B) Tests globaux

- remplissage d'un Downcomer
- écoulement le long d'une paroi chauffante

A - *TESTS ANALYTIQUES* -

Deux tests ont été effectués avec comme fluide un gaz parfait. Ces tests effectués sans termes dissipatifs dans une géométrie simple permettent de comparer la solution obtenue à une solution analytique. On peut ainsi vérifier si le schéma est dissipatif ou si il reste physique.

Le gaz parfait utilisé a une constante γ égale à 1.4. C'est-à-dire que lors d'une transformation adiabatique la relation liant la pression et la densité est $p/\rho^{\gamma} = cte$. Pour écrire l'équation d'état liant densité, pression et enthalpie on utilise les relations thermodynamiques valables pour un gaz parfait.

$$\frac{P}{\rho.T} = cte = R$$

énergie interne $e = cv.T$

enthalpie $h = cp.T$

$$cp/cV = \gamma = 1.4 \quad ; \quad cp - cv = R$$

il a été fait le choix d'un gaz monoatomique : $R = 259.8$ lorsque P, ρ, T sont exprimés en unités M.K.S.A.

1°) *Tube à choc* -

Ce test a été utilisé par Gary A. SOD (réf. 24) et BRAM VAN LEER (réf. 25) pour tester des schémas explicites adaptés au traitement des équations non linéaires.

A priori le schéma des éléments finis n'est pas bien adapté à ce test, il a plutôt été développé pour des transitions lentes vis à vis de la vitesse du son. Il est cependant intéressant de voir comment il se comporte dans ce cas.

1°) Description du test -

Nous avons repris le test tel qu'il a été défini par les auteurs précédemment cités.

Dans un tube de longueur 1, au temps r = 0, le gaz est au repos, il y a une discontinuité de pression et de masse volumique au centre. Elles valent P_1, ρ_1 à gauche, et P_5, ρ_5 à droite.

$P_1 = 1.$, $\rho_1 = 1.$, $P_5 = .1$, $\rho_5 = .125$, $u_1 = u_5 = 0$

Au temps t > 0, on obtient 5 régions (figure VI.1).

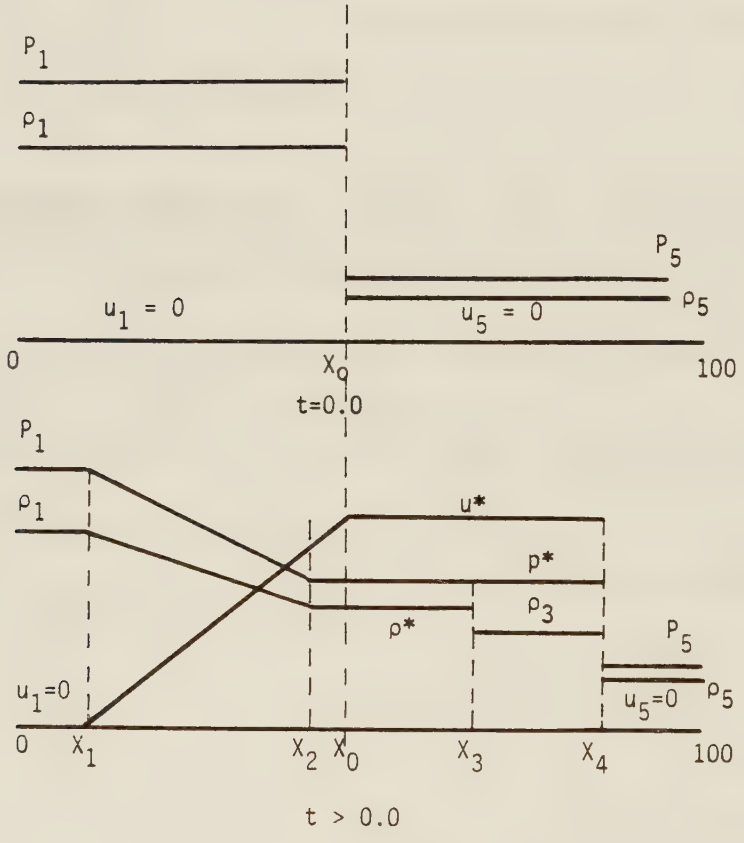


Figure VI 1

C'est la solution du problème de Rieman. Les points x_1 et x_2 représentent le front et la fin d'une onde de dépressurisation. Le point x_4 représente la position du choc, x_3 la position de la discontinuité de contact.

Les équations du gaz parfait permettent d'obtenir la solution analytique en tout point (réf. 24) :

Le segment est divisé en plusieurs domaines. En particulier sur X_2 X_4, les valeurs P^X et u^* de la pression et la densité sont constantes. Sur X_2 X_3 puis X_3 X_4 la valeur de la masse volumique est constante.

De X_1 à X_3, il n'y a pas de choc, l'entropie du fluide est constante et égale à celle de l'état 1, on peut donc les lier par des variations isentropiques.

En particulier si on a définit :

$$M1 : (P_1 - P^*)\ (u_1 - u^*)$$

on trouve $$M_1 = (\rho_1 P_1)^{1/2}\ \phi(P^*/P_1)$$

avec $$\phi(x) = \frac{\gamma-1}{2\gamma^{1/2}} \cdot \frac{1 - x}{1-x^{1/2}-1/2\gamma}$$

en utilisant $$P_1/\rho_1{}^{\gamma} = P^*/\rho^{*\gamma}$$

On est capable de calculer les vitesses de propagation des points x_1 et x_2 :

point x_1 $$V_1 = -(\gamma \frac{P_1}{\rho_1})^{1/2}$$

point x_2 $$V_2 = -(\gamma \frac{P^*}{\rho^*})^{1/2} + u^*$$

La vitesse du son pour un état représenté par une pression P et une masse volumique ρ est :

$$C = (\gamma \frac{P}{\rho})^{1/2}$$

On peut calculer u^* par la formule :

$$u^* + \frac{2c^*}{\gamma-1} = u_1 + \frac{2C_1}{\gamma-1}$$

Donc il faut calculer P^X et ρ^*. Pour cela il faut utiliser les relations de Rankine-Hugoniot à travers le choc en x_4.

On trouve pour M5

$$M5 = (\rho_5 P_5)^{1/2} \quad \psi(P^*/P_5)$$

$$\psi_{(x)} = \left(\frac{\gamma+1}{2} x + \frac{\gamma+1}{2}\right)^{1/2}$$

en utilisant l'équation d'état $P/\rho T$ = ct.

La vitesse V_3 du point x_3 est égale à u^*.

On obtient enfin P^* en combinant les expressions de M_1 et M_5.

$$P^* = \left(u_1 - u_5 + \frac{P_5}{M_5} - \frac{P_1}{M_1}\right) / \left[\frac{1}{M1} - \frac{1}{M5}\right]$$

M_1 et M_5 sont des fonctions de P^*. La solution de cette équation doit être obtenue par approximations successives.

2°) Résultats de calcul)

Dans le cas simple monodimensionnel les calculs ont été faits avec le schéma semi-implicite, puis avec un traitement totalement implicite des équations.

Dans les deux cas le pas en espace était 0,01. La vitesse du son donnée par les valeurs numériques est c_1 = 376 m/s, le pas de temps utilisé est $t = 0.9 \frac{\Delta x}{C} = \cdot 24\ 10^{-3}$. Les graphes représentent les courbes obtenues après 34 pas de temps.

Schéma semi implicite -

La figure VI.2 donne les courbes obtenues pour la pression, la densité, l'enthalpie et la vitesse en trait plein, et celle de la solution exacte en pointillés, au pas de temps 34.

On voit que le schéma semi implicite développe un certain nombre d'oscillations au passage du choc. Si on compare le schéma semi implicite aux schémas explicites tels que celui de BRAM Van Leer (25), on voit que le schéma semi implicite n'utilise pas toutes les informations pour déterminer un équilibre sur les termes de pressions mais néglige le terme du transport de quantité de mouvement. Or dans ce test, les discontinuités portant sur ces termes sont du même ordre de grandeur que les termes de pressions, puisque les vitesses sont à 0,9 fois la vitesse du son.

D'autre part les éléments finis introduisent une discrétisation continue des quantités de mouvement, l'approximation d'un gradient brusque de pression par les quantités de mouvement entraîne ces oscillations.

Le schéma suit cependant correctement la position des fronts.

Schéma totalement implicite -

Ce schéma fait l'équilibre des termes de convection non linéaire en quantité de mouvement au temps m+1. Les dérivées en temps interviennent dans ce cas, plutôt comme des sources pour les équations stationnaires.

Les résultats correspondant au 34ème pas de temps sont donnés sur la figure VI.3.

Ces résultats montrent que le schéma fait correctement la balance. Il n'y a plus d'oscillation, et en dehors des régions où les phénomènes de dissipation sont importants, le schéma donne les valeurs correctes. Ceci est encourageant pour les calculs stationnaires et instationnaires.

Lorsqu'on compare la production d'entropie des schémas explicites et implicites (figure VI.4), on s'aperçoit qu'ilsapplanissent la discontinuité qui apparaît au point x_3. Cependant au niveau du choc, en x_4, le schéma implicite produit nettement moins d'entropie que le schéma semi implicite. Cette constatation implique le fait qu'il est très important de bien tenir compte du terme de convection de la quantité de mouvement.

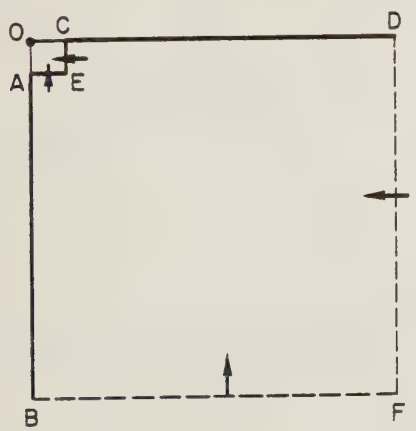
N.B. : L'entropie a été calculée en comparaison par rapport à l'état P_1, ρ_1. Pour un état P, les courbes représentent la quantité

$$S = \frac{P}{P_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^{\gamma} - 1$$

2°) *Ecoulement concentrique* -

1°) Description du test -

Ce test est bidimensionnel et linéaire. C'est en fait une approximation de l'écoulement concentrique. Le domaine est un carré de côté 11, un carré de côté 1 a été enlevé dans le coin supérieur gauche.



L'écoulement est convergent, il sort par les côtés AEF, et il rentre par les côtés BFD.

La pression est imposée en sortie, les débits et l'enthalpie sont imposés en entrée.

Les mailles sont des carrés de côté 1.

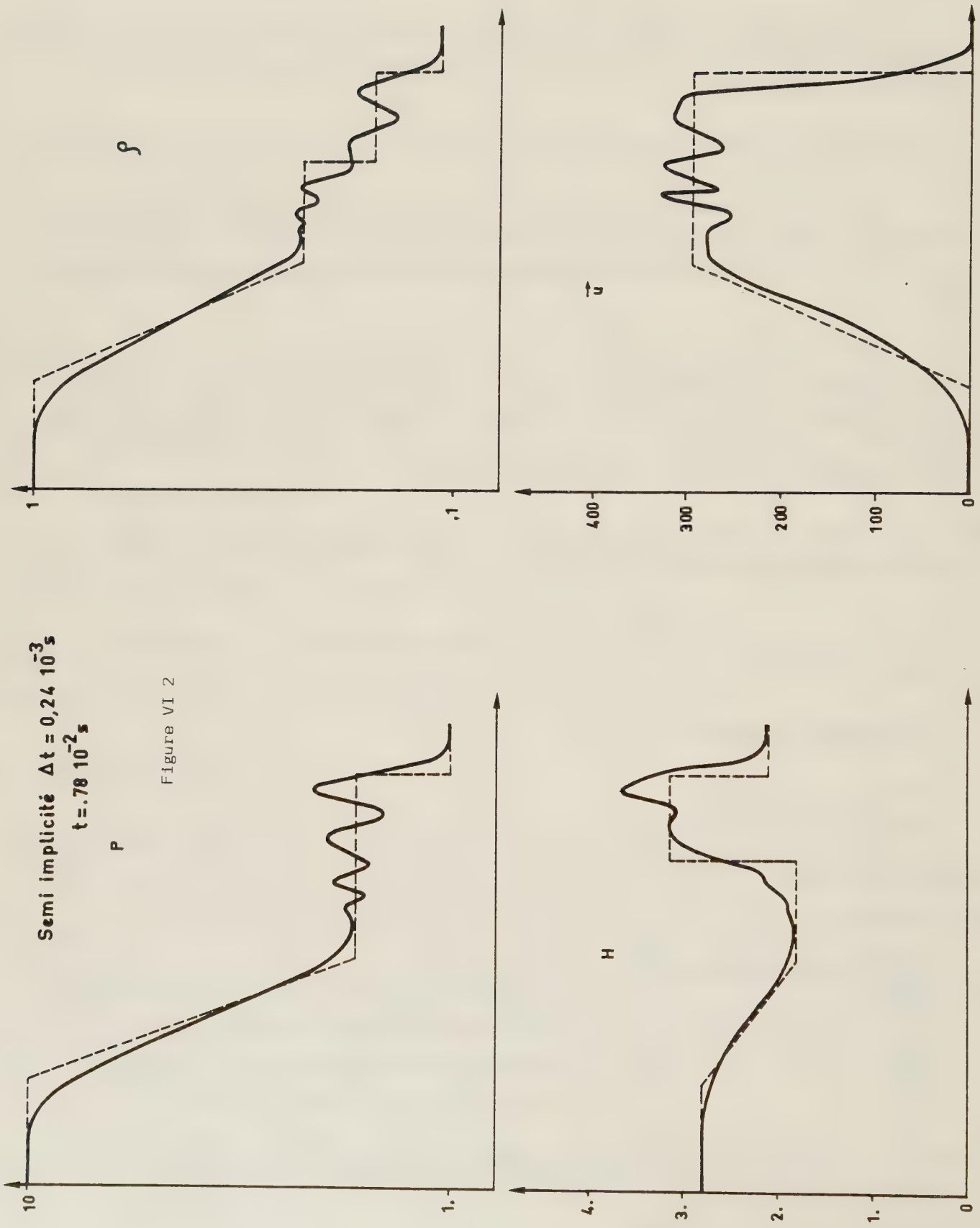

Semi implicité Δt = 0,24 10⁻³s
t=.78 10⁻²s
P
10
1.
ρ
1
,1
H
4.
3.
2.
1.
0
u
400
300
200
100
0

Figure VI 2

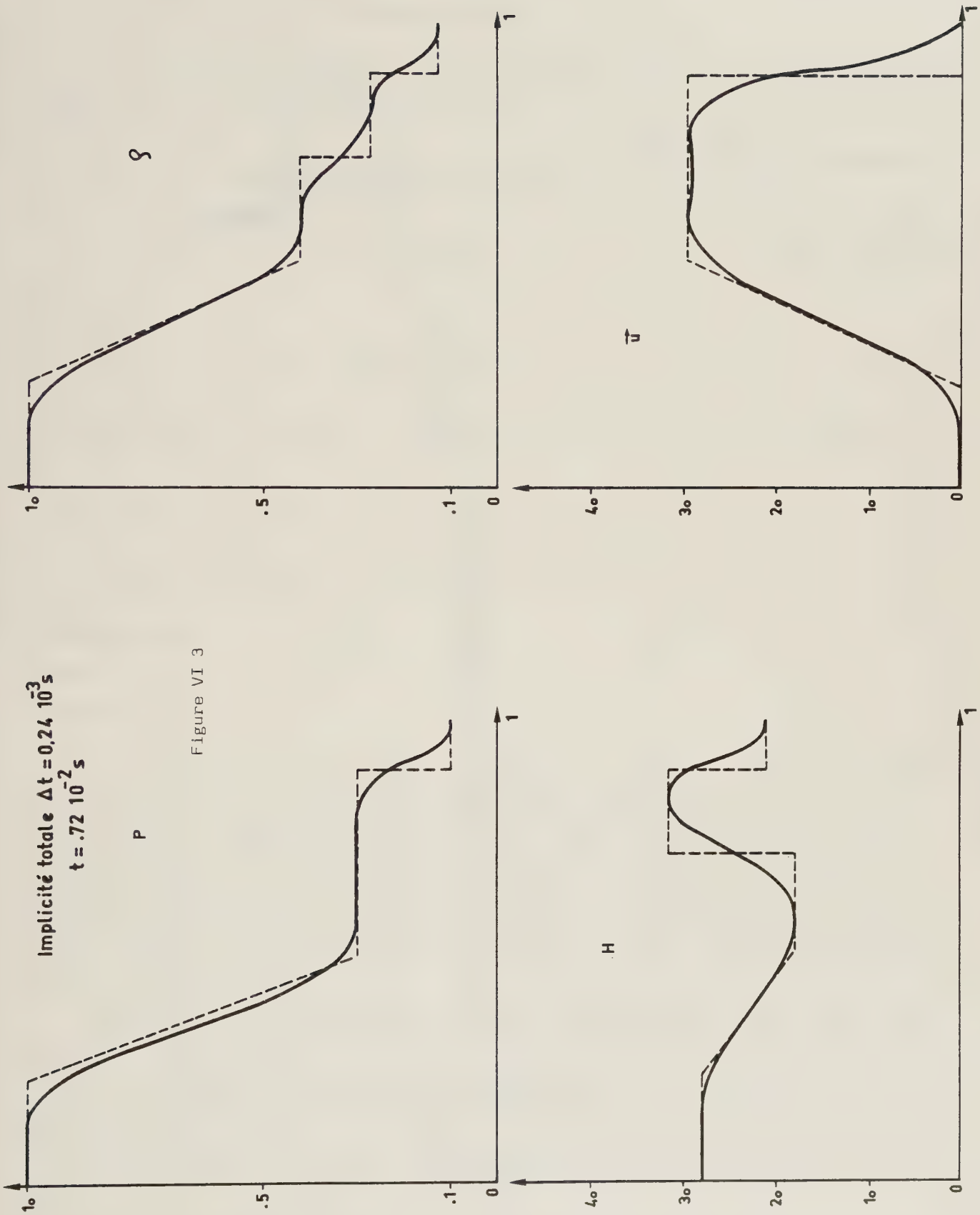
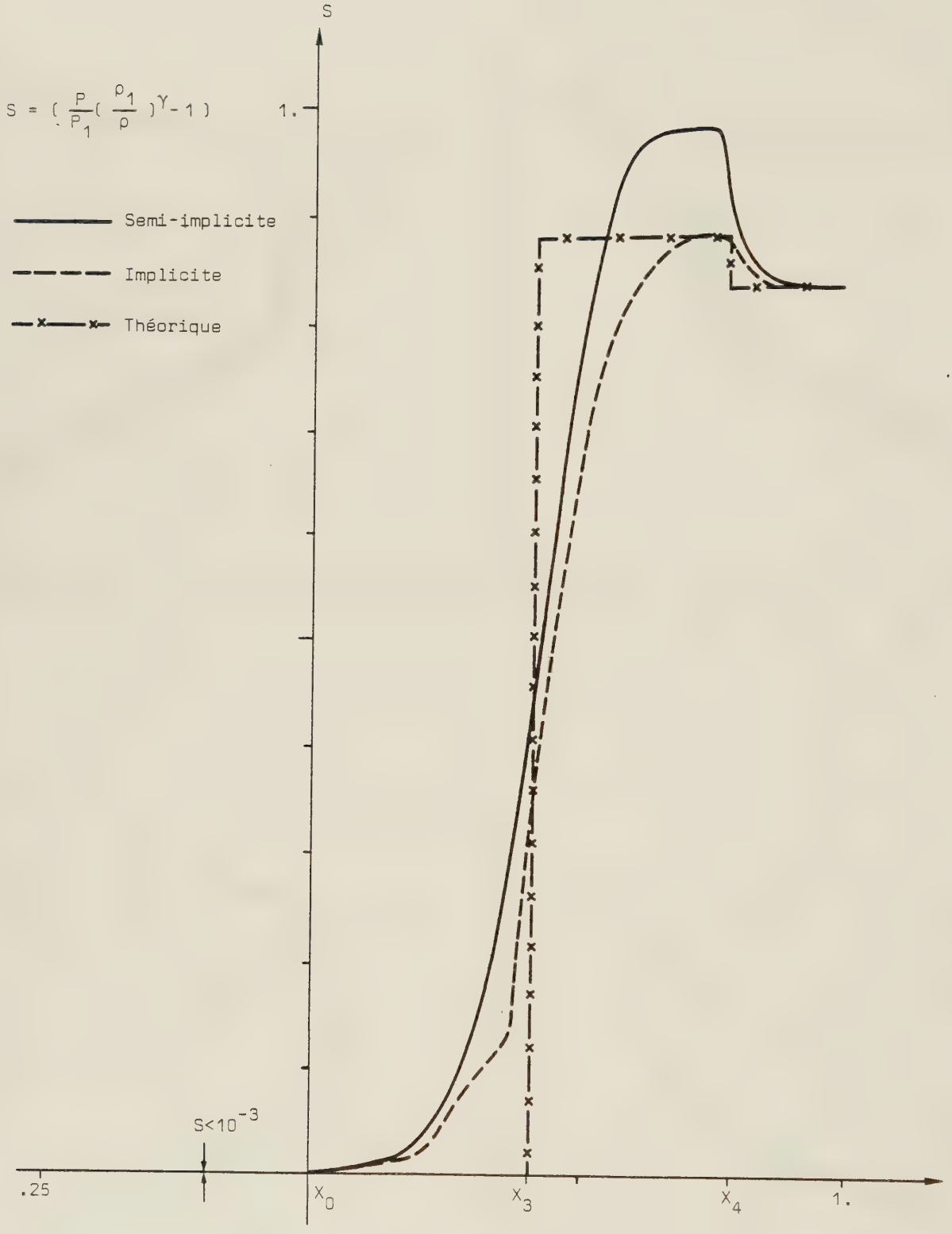


Figure VI 3



Répartition spatiale de la quantité S
au temps t = .72 10^{-2} s

FIGURE VI.4

En supposant que l'écoulement est proche d'un écoulement concentrique de centre O, on peut calculer la valeur théorique des quantités à une distance r de O.

A = 2 r est la section de passage au rayon r.

AC est la section critique, en-dessous de laquelle le gaz ne peut plus passer. M est le nombre de mach. On trouve les relations suivantes :

$$\frac{A}{AC} = \Sigma(M) = \left(\frac{2}{\gamma+1} \times \left(1 + \frac{(\gamma-1)\,M^2}{2}\right)\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \cdot \frac{1}{M}$$

$$\frac{P}{P_i} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)} = \omega(M)$$

$$\frac{\rho}{\rho_i} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1/\gamma-1} = R(M)$$

P_i, ρ_i sont la pression et la densité génératrices, c'est-à-dire les quantités obtenues à vitesse nulle.

2°) Résultats du calcul -

Les conditions limites imposées ont été

pression égale à 10^6 Pa en sortie

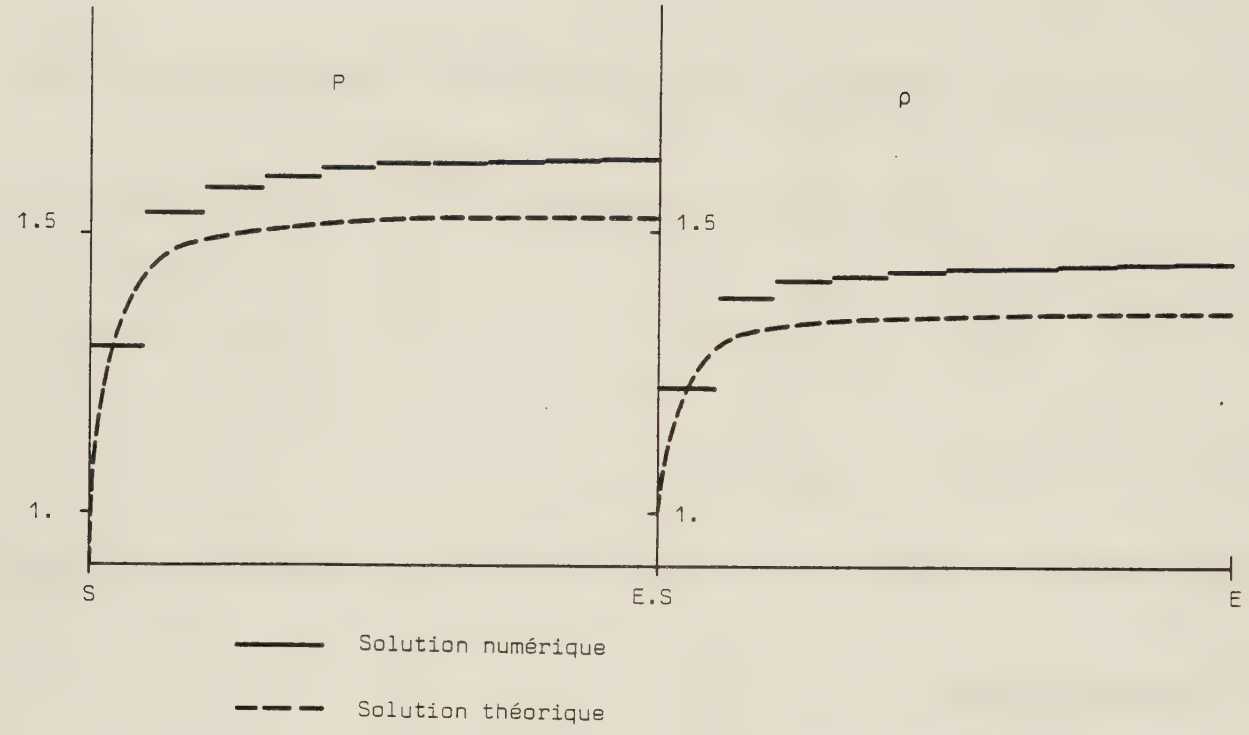
débit de 272 kg/m^3 en entrée

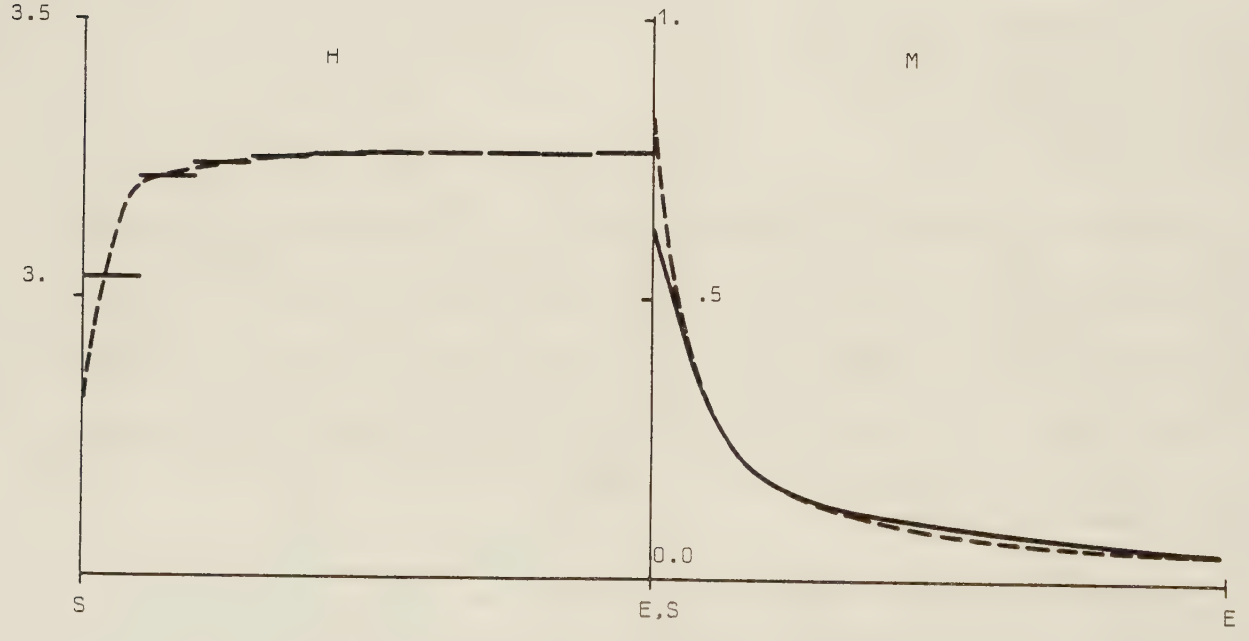
enthalpie de.325 10^6 J/kg

La section d'entrée est onze fois plus grande que la section de sortie. Le nombre de Mach théorique est de .85 en sortie. C'est le schéma semi implicite qui a été utilisé. Pour obtenir l'état stationnaire, on est parti de l'état au repos avec les conditions aux limites imposées. Les calculs ont été arrêtés après 200 pas de temps. La balance des débits dans les mailles était vérifiée à 1% près. Cependant on ne peut pas dire vraiment que le régime stationnaire était établi, car il y avait dès oscillations qui avaient tendance à faire passer les débits tantôt d'un côté, tantôt de l'autre par rapport à l'axe de symétrie.Ces oscillations paraissaient longues à s'amortir.

La figure VI.5 montre un tableau des comparaisons des valeurs de la pression, de la densité de l'enthalpie et du nombre de Mach, entre la solution de l'écoulement théorique, et la solution obtenue le long du côté CD. On remarque qu'il n'y a pas une bonne concordance Nous pensons que c'est surtout dû au fait que le maillage n'était pas adapté, la solution ne varie presque pas, sauf sur une petite couronne entourant la sortie où les valeurs changent brusquement, sur deux mailles. La figure VI.6 donne l'allure du champ des vitesses.

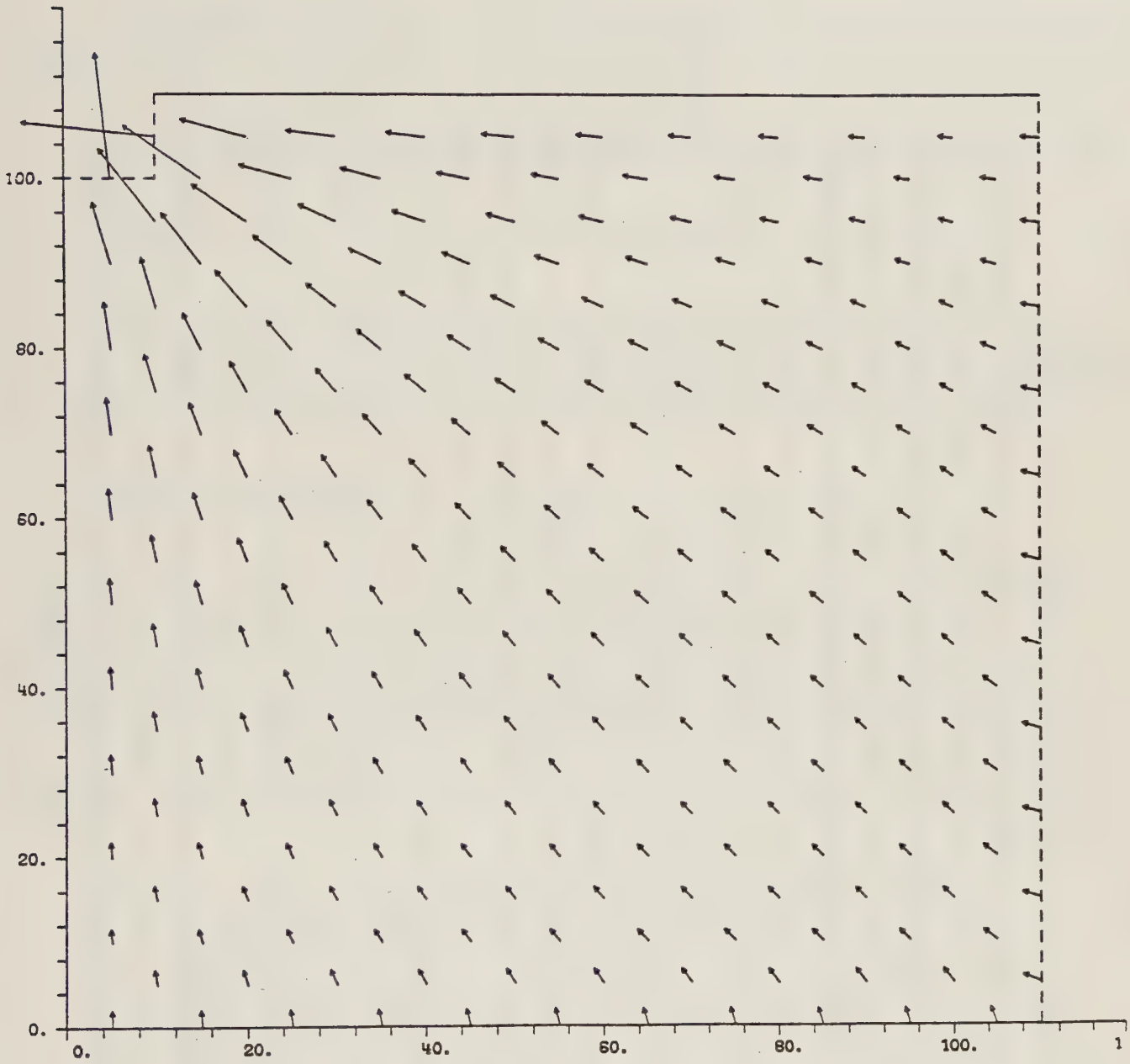
Sur la figure VI.7 les éléments du maillage sont représentés, avec dedans la





Répartition de la pression P, la densité ρ, l'enthalpie][, et le nombre de Mach M, le long du bord supérieur entre l'entrée E et la sortie S. Calculs à 1 %.

FIGURE VI.5



Champ de vitesses, écoulement concentrique calcul à 1 %.

Figure VI.6

ENTROPIE, pourcentage d'augmentation par maille $S = (\frac{P}{P_i} (\frac{\rho_i}{\rho})^t - 1)$

3,70	3,17	3,04	2,93	2,85	2,78	2,70	2,55	2,10	1,32
4,06	3,66	3,40	3,23	3,11	3,02	2,95	2,90	2,83	2,65	2,28
3,82	3,68	3,49	3,30	3,14	3,02	2,93	2,86	2,75	2,43	1,60
3,80	3,73	3,56	3,36	3,17	3,02	2,92	2,88	2,85	2,78	2,66
3,75	3,71	3,59	3,40	3,19	3,01	2,89	2,81	2,71	2,41	1,60
3,68	3,67	3,58	3,43	3,23	3,05	2,90	2,82	2,76	2,61	2,25
3,61	3,61	3,56	3,44	3,28	3,10	2,94	2,83	2,71	2,44	1,68
3,55	3,55	3,52	3,45	3,33	3,18	3,03	2,89	2,77	2,60	2,35
3,48	3,49	3,48	3,44	3,37	3,27	3,14	2,98	2,75	2,30	1,39
3,41	3,42	3,42	3,41	3,39	3,33	3,25	3,12	2,87	2,33	1,38
3,36	3,37	3,37	3,38	3,38	3,36	3,33	3,25	3,01	2,23	0,0

Figure VI.7

valeur de l'entropie

$$S = \left(\frac{p}{p_o}\left(\frac{\rho_o}{\rho}\right)^{\gamma} - 1\right) \times 100$$

Cette figure permet de vérifier que l'entropie dans une maille est toujours plus grande à la plus petite valeur dans les mailles qui se trouvent en amont. L'entropie croît de plus en plus vite vers le centre où les variations de pressions et de densité sont plus fortes.

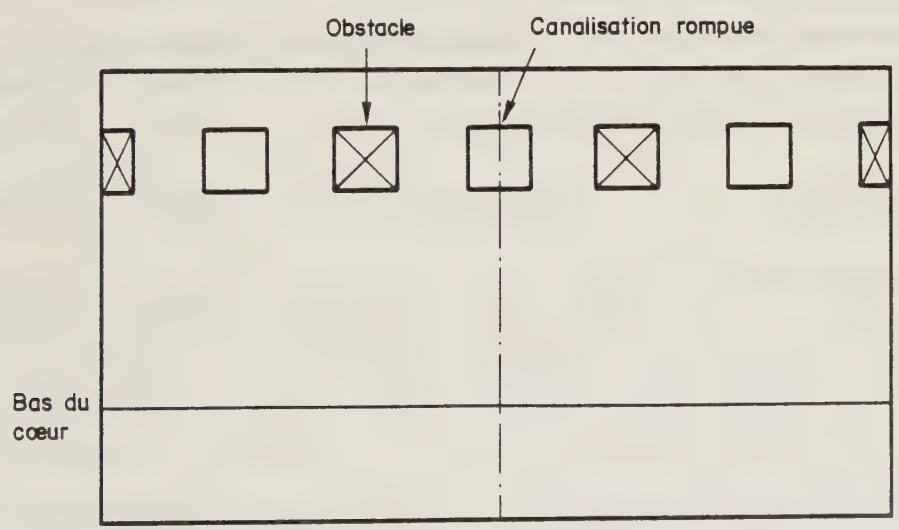
On peut remarquer comme il a été dit précédemment que cette figure n'est pas symétrique, l'état stationnaire n'était pas atteint.

B - TESTS GLOBAUX -

Ces tests ont été effectués en utilisant des tables de fonctions de l'eau, liquide et vapeur, en pression et enthalpie. Les fonctions représentatives du mélange diphasique sont obtenues en appliquant le modèle homogène. Ces tests permettent de voir le genre de calculs possibles avec la méthode.

1°) Remplissage d'un downcomer -

Ce test est inspiré d'une séquence accidentelle envisagée dans les réacteurs nucléaires. Il s'agit du remplissage de l'espace annulaire qui se trouve autour du coeur dans la cuve du réacteur. Après une rupture d'une des canalisations, le coeur peut se trouver asséché, la cuve est alors remplie de vapeur surchauffée. Pour refroidir le coeur on essaye alors de réintroduire du liquide froid en l'injectant par une des canalisations non rompues. Cependant, il y a un fort courant de vapeur qui se précipite vers l'ouverture de la canalisation rompue et le liquide peut être entraîné. Les études sont faites sur un modèle déplié de l'espace annulaire qui a une symétrie d'ordre 3.



Trois canalisations arrivent en haut du coeur qui apportent l'eau froide en fonctionnement normal. Trois autres canalisations partent du coeur pour en extraire l'eau chaude, elles traversent l'espace annulaire, elles forment des obstacles.

Pour le calcul, il a été envisagé un demi espace modélisé sur un rectangle. Deux maillages ont été comparés, l'un avec des mailles de 50 cm, l'autre avec des mailles moitiées. Les différentes caractéristiques des maillages et les conditions aux limites imposées sont présentées dans la figure VI.8.

2°) Etablissement d'un régime permanent en vapeur surchauffée -

Avant d'introduire le liquide, on veut obtenir un régime permanent en vapeur. Les conditions aux limites imposées sont :

- des conditions de symétrie sur les bords verticaux S1S4 et S2S3
- des conditions de paroi sans frottement sur le bord supérieur S4S3
- sur le bord inférieur on impose la pression et l'enthalpie de la vapeur
- la canalisation rompue est modélisée par le rectangle A (figure VI.8) de dimension l = 25 m, h = 5 m. On représente la fuite par un terme de perte de masse A. proportionnel à la différence entre la pression calculée en A et une pression de 1.10^5 Pa.

Le régime stationnaire a été calculé comme limite d'un transitoire. Avec les deux maillages on est parti d'un fluide au repos, avec un gradient de pression équilibrant la pesanteur. Le régime stationnaire s'est trouvé établi au bout de 0,5 s en temps réel. Des essais faits avec plusieurs pas de temps montrent que la condition linéaire de stabilité $(\frac{Ux\ t}{x} \times \frac{Uy\ t}{y}) < 1$ donne une indiquation, sur la convergence de la méthode. Au delà le nombre d'itérations pour obtenir la convergence, augmente considérablement. En-dessous de cette limite en temps, pour des pas de temps de 10^{-2} s et $5\ 10^{-2}$ s le calcul est arrivé aux mêmes résultats à temps égaux. La précésion se dégrade pour un pas de 10^{-1} s.

Le régime stationnaire obtenu, donne un écoulement quasiment uniforme dans le cas avec une vitesse verticale d'environ 1 m/s. Ce n'est que dans les deux derniers mètres que l'écoulement se précipite autour de la maille A. Les vitesses atteignent près de A environ 6 m/s en module.

3°) Injection d'eau froide -

Une fois le régime permanent en vapeur surchauffée établi on injecte de l'eau froide dans le maillage, par le rectangle B. Les conditions aux limites précédentes sont maintenues. L'arrivée d'eau froide est modélisée dans le rectangle B par :

- un terme source en masse $D_o = 1\ kg/m^2/s$
- un terme source dans l'équation d'enthalpie : $S_o = D_o \times h_o$ où h_o est l'enthalpie du liquide à 40°C.

Le terme D_o est maintenu constant et égal au débit de fuite dans le régime permanent en vapeur.

Les deux maillages donnent le même scénario. Le premier phénomène qui se produit est très violent, c'est une condensation de la vapeur sur le liquide. Ce n'est que vers 0.2 s, que du fluide commence à s'écouler vers le bas, hors du carré B. Le calcul a été arrêté à .72 s, on observe à ce moment, une chute du mélange diphasique dans la vapeur, qui va en s'accélérant.

Durant la première partie du phénomène, des pas de temps de 5.10^{-3} s ont été utilisés dans les deux maillages, ensuite le pas a été de 2.10^{-2} s pour le maillage 2, et $5\ 10^{-2}$ s pour le maillage 1.

La figure VI.9 représente les débits traversant les côtes des mailles pour le maillage 1, à différent temps à partir du régime permanent.

La figure VI.10 représente le champ des quantités de mouvement pour le maillage 2, à différenttemps à partir du régime permanent. La figure VI.11 représente le champ des vitesses aux mêmes instants.

On peut comparer les deux maillages quant à leur diffusion. La figure VI.12 donne la répartition des taux de vide autour de l'arrivée d'eau froide au même instant t = 0.5 s. Ces courbes ont été obtenues par interpolation linéaire des valeurs aux centres des mailles. On s'aperçoit que la diffusion du schéma est importante et qu'elle se réduit avec le pas en espace.

Les débits sous la maille B aux différentes hauteurs x_1, x_2, x_3 (figure VI.8) ont été comparés pour les deux maillages. La figure VI.13 donne leur évolution au cours du temps. Le moment d'inversion donne le passage à cet endroit du mélange diphasique. On voit que le maillage 1, en raison d'une diffusion plus importante donne des temps plus courts.

Des calculs ont été faits avec des codes aux différences finies aux Etats Unis (réf. 31). Cependant, bien que les résultats soient semblables, la comparaison sur les temps d'évolution ne peut être faite car la modélisation de ces codes fait intervenir un champ de deux fluides avec écart de vitesse.

2°) *Ecoulement le long d'une plaque chauffante* -

1°) Description du cas -

Ce test fait intervenir également l'équation d'énergie. On introduit ici un terme source de chaleur dépendant de la position. D'autre part dans une deuxième partie, on fait intervenir des termes de frottement dans l'équation de quantité de mouvement.

Il s'agit d'un écoulement plan, le long d'une plaque de 4 mètres de large et 10 mètres de hauteur, 6 cm d'épaisseur. Le chauffage est inégalement réparti, la moitié gauche de la paroi est chauffée cinq fois plus fort que la moitié droite. On a ajouté deux mètres

de hauteur libre au-dessus du domaine pour laisser l'écoulement se stabiliser. Les conditions limite imposées sont, une pression de 71.10^5 Pa en haut, un débit de 800.kg/m^2/s et une enthalpie de 1,268 10^4 kJ/kg (température de saturation 250°C) dans le bas.

Les données du cas sont regroupées dans la figure VI.14. Deux maillages ont été utilisés. Un maillage 1 avec des mailles de deux mètres a été utilisé pour initialiser les calculs dans le maillage 2, qui à des mailles de 50 cm. Dans ce cas on cherche à obtenir un régime permanent, en faisant évoluer le système. Dans la dernière partie, on a introduit des pertes de charge singulières tous les mètres en hauteur, portant sur les vitesses verticales. Les pertes de charge sont là pour modéliser des grilles de maintien.

2°) Entrée à température de saturation, écoulement libre Maillage 1 -

L'état initial, au temps zéro, est l'écoulement du fluide non chauffé, soumis à la pesanteur. Les vitesses sont de l'ordre de 1,2 m/s au début. Au cours du transitoire on observe des vitesses maxima de l'ordre de 4 m/s, ce qui correspond par analogie à la condition de courant pour des diffusions finies, à des pas de temps admissibles de l'ordre de . 25 secondes.

Il y a eu en tout 260 pas de temps calculés, pour un temps réel de 46,5 s. A 46,5 s, on peut considérer que l'on a atteint un état stationnaire, car la balance des débits est équilibrée à mieux de 10^{-3} en valeur relative.

Les pas de temps utilisés sont allés de 0,05 s au début à 0,2 s à la fin. On a obtenu 260 pas de temps calculés en 84,7 s. Soit une moyenne de 0,32 s par pas de temps et une moyenne de 0,027 s par élément de maillage et par pas de temps.

On observe des transitoires assez violents, avec recirculation des débits, mais le régime permanent ne fait pas apparaître de macro tourbillon. La figure VI.15 retrace l'évolution des débits verticaux et transverses jusqu'au régime permanent. On observe en particulier la formation d'un grand tourbillon qui fini par disparaître.

3°) Entrée à température de saturation, écoulement libre, maillage 2 -

Le calcul a été initialisé au temps zéro, par interpolation de la solution stationnaire du maillage 1.

Il a été fait 60 pas en temps de 0,1 s. On a obtenu un temps de calcul moyen par élément et par pas de temps de 0,03 s. La condition de stabilité, compte tenu des vitesses de 3 m/s donnait un pas de temps de 0,1 s. On s'aperçoit qu'en fait le nombre d'itérations était devenu grand. A partir de 4 s, il s'est imposé un pas en temps moitié pour ne pas augmenter trop le nombre d'itérations.

Le calcul effectué jusqu'à 5 s, ne permet pas de conclure à l'établissement d'un régime permanent. Le fluide tend à homogénéiser son taux de vide, à partir de la moitié du parcours. Mais il y a une brusque discontinuité du fluide chaleur sur l'axe. Entre les deux mailles situées de part et d'autre de l'axe à même hauteur, il y a une inversion du

taux de vide qui ne s'atténue que très faiblement au cours du temps.

La figure VI.16, montre la répartition des débits verticaux et horizontaux au temps $t_i = 5$ s. On voit une zone d'eau morte à mi-hauteur dans le canal le moins chauffé.

La densité du fluide diphasique diminue très fortement avec la vaporisation de l'eau. C'est un bon indicateur de l'énergie ammagasinée par le fluide. La figure VI.18 donne la répartition des densités dans la plaque pour l'écoulement libre, comparée à celle de l'écoulement avec perte de charge. La figure VI.19 donne les débits verticaux à différentes côtes.

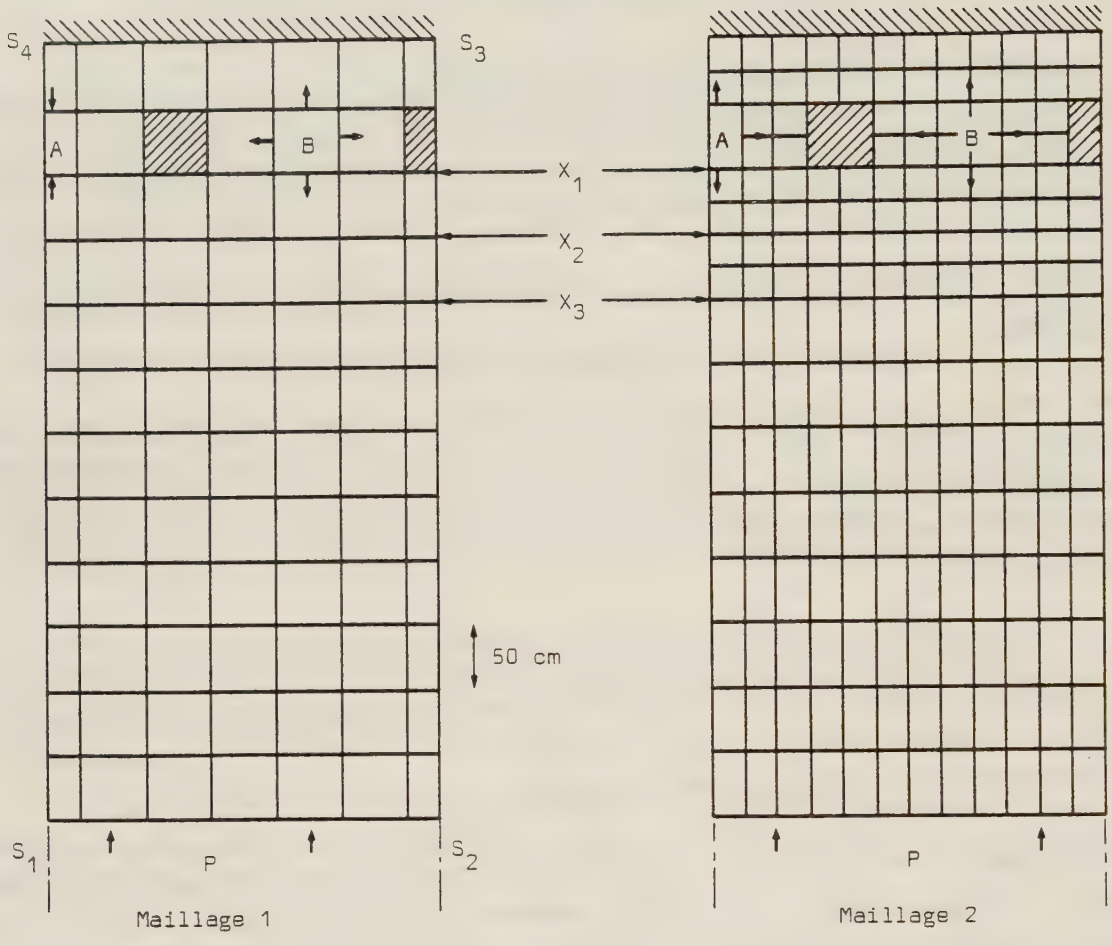
4°) Entrée à température de saturation, écoulement avec pertes de charges singulières Maillage 2 -

Les conditions aux limites imposées sont toujours les mêmes. Pour simuler les grilles servant au maintien des tubes dans un générateur de vapeur, il a été introduit des pertes de charges singulières dans le sens vertical tous les mètres, à l'exclusion à tout autre effet visqueux. On a sur une face horizontale $\delta P = \frac{K}{2} \rho u^2$. Le coefficient K a été fixé à 7 dans le mélange diphasique.

de temps utilisés ont été de $2\ 10^{-2}$ s. Le calcul a été initialisé avec la solution de l'écoulement libre. Les calculs ont été poursuivis jusqu'à un temps de 7,7 s. Le régime permanent n'a pas été atteint, mais il ne semble pas qu'il apparaisse d'instabilité, les débits des deux côtés s'équilibrent petit à petit.

Par rapport au cas précédent, la différence entre les deux côtés est beaucoup plus faible du point de vue des champs de quantité de mouvement (ou vitesse) (figure VI.17), ou des débits verticaux (figure VI.19). La carte des débits est inversée, il passe plus de débit dans le canal le moins chauffé.

Du point de vue des densités, il y a une plus grande inhomogénéité, due au fait qu'il y a moins de brassage. Le côté chaud à tendance à s'assécher (figure VI.18).



Géométrie : L = 3.m
H = 6.m

Maillage 1 : DX-DY = .5 m
82 mailles
149 inconnues débits

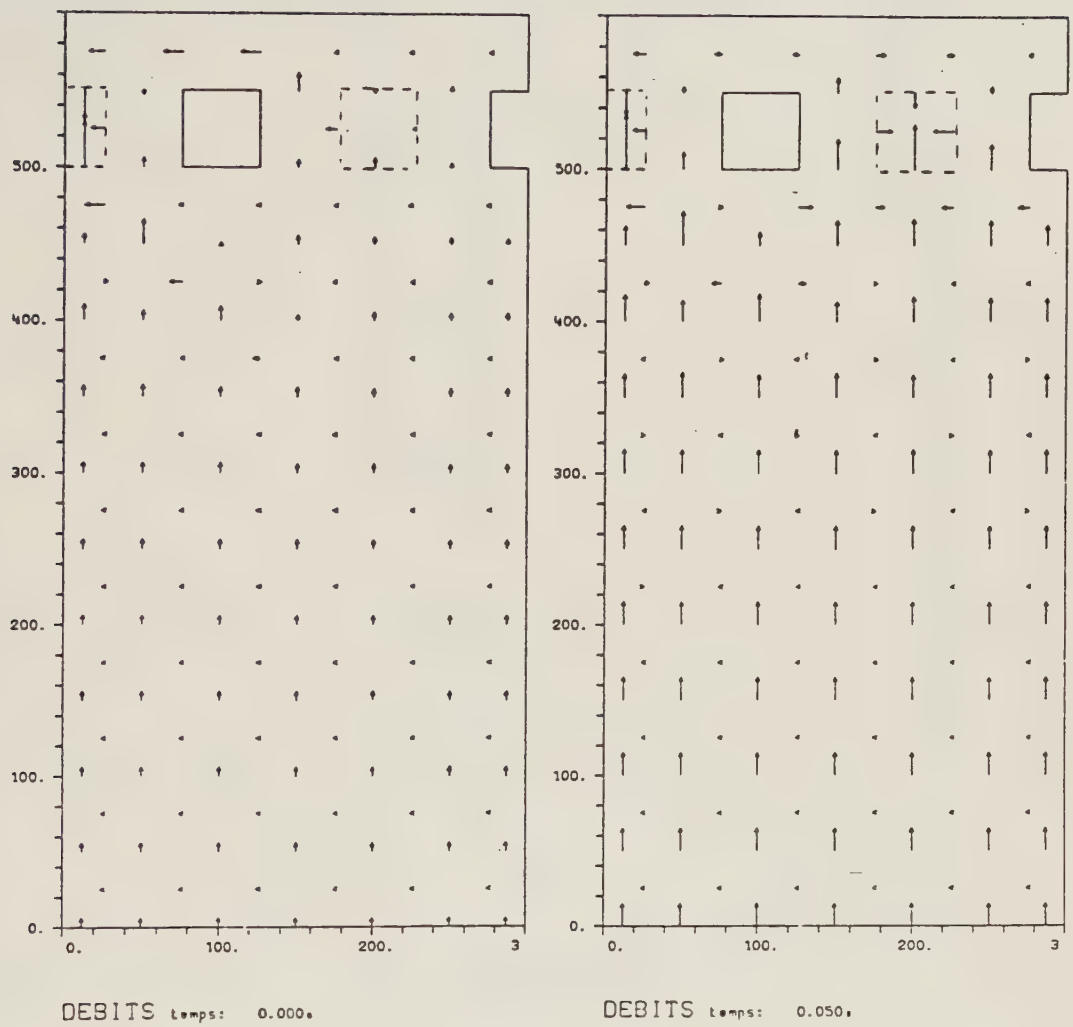
Maillage 2 : 4>4.m : DX=DY = .25 m
212 mailles
361 inconnues débits

Conditions imposées

Pression en S_1S_2 : 5.10^5 P_A
Enthalpie S_1S_2 : $2.3\ 10^6$ J/kg
Débit de fuite en A : $K(P_A-1.10^5)$ kg/m²/s $K = 1.10^{-4}$
Gravité : g = 10. m/s²

Débit d'arrivée en B : 1.10^2 kg/m²/s
Enthalpie du liquide en B : $1.679\ 10^2$ J/kg

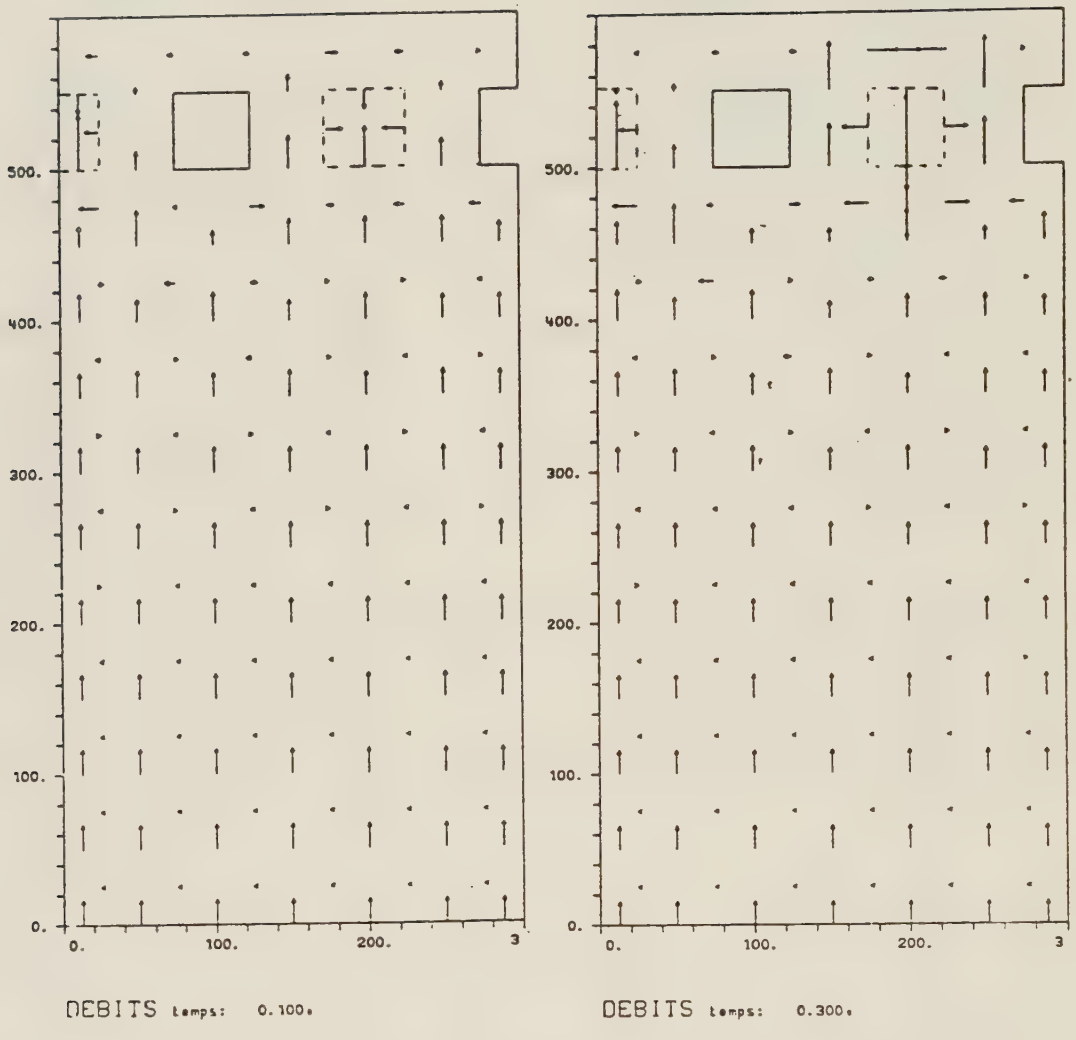
FIGURE VI.8



Evolution des débits

Maillage 1

Figure VI . 9

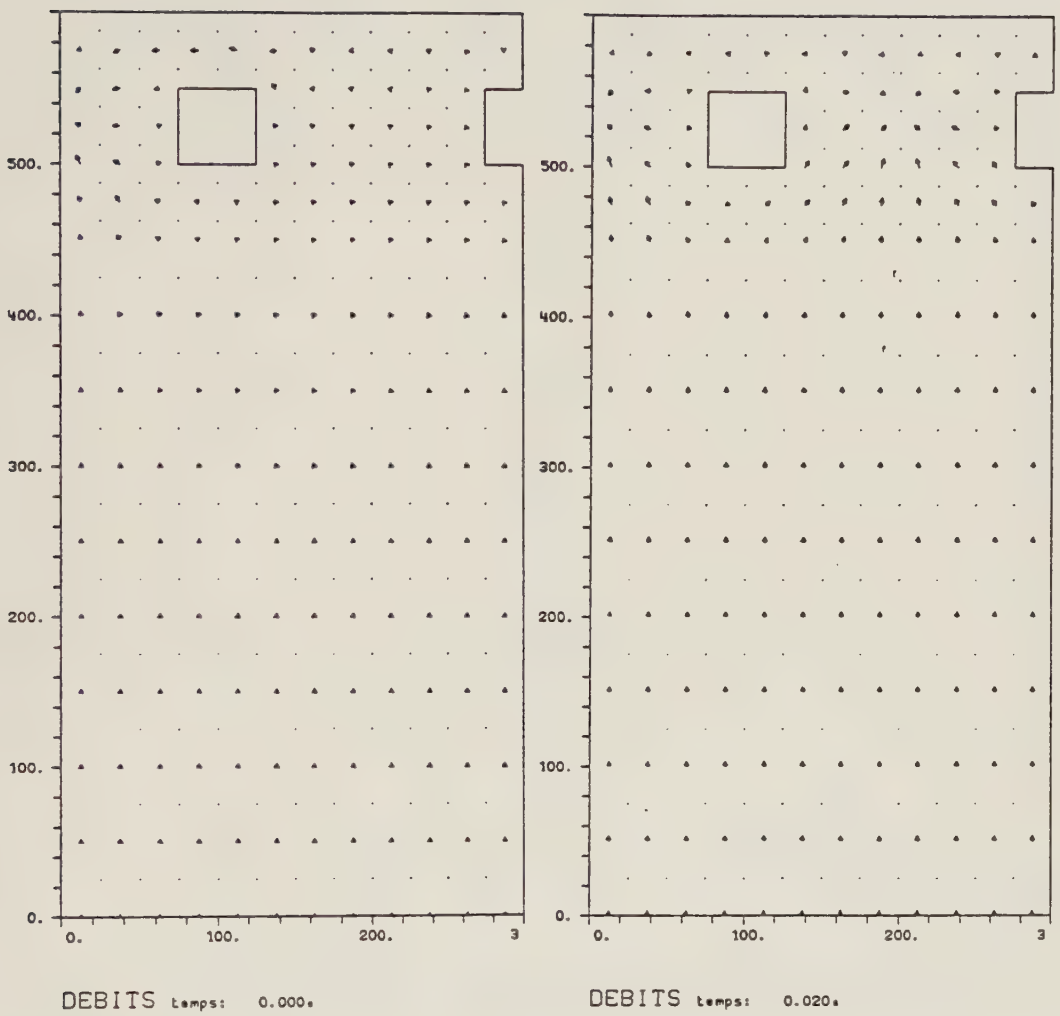


Evolution des débits

Maillage 1

Figure VI.9

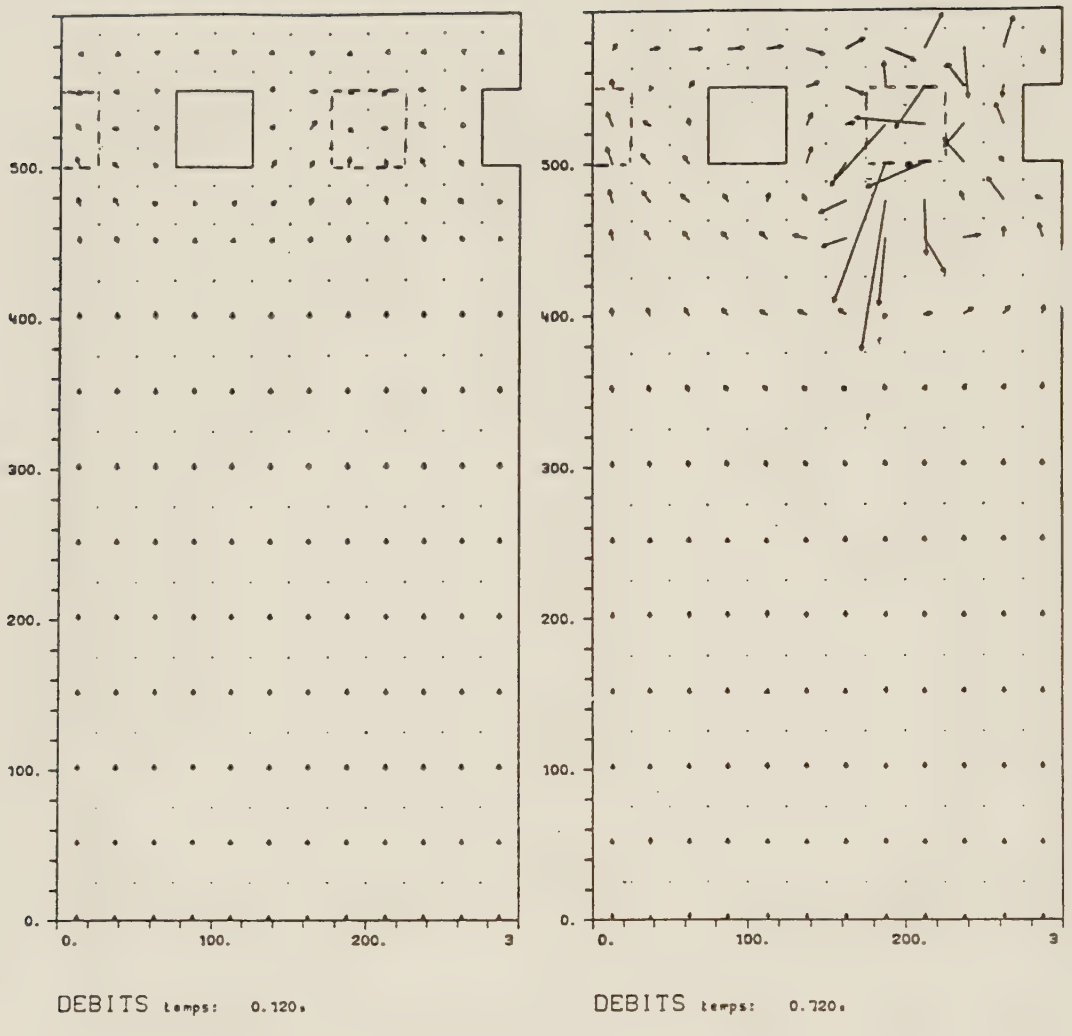
suite



Evolution des quantités de mouvement

Maillage 2

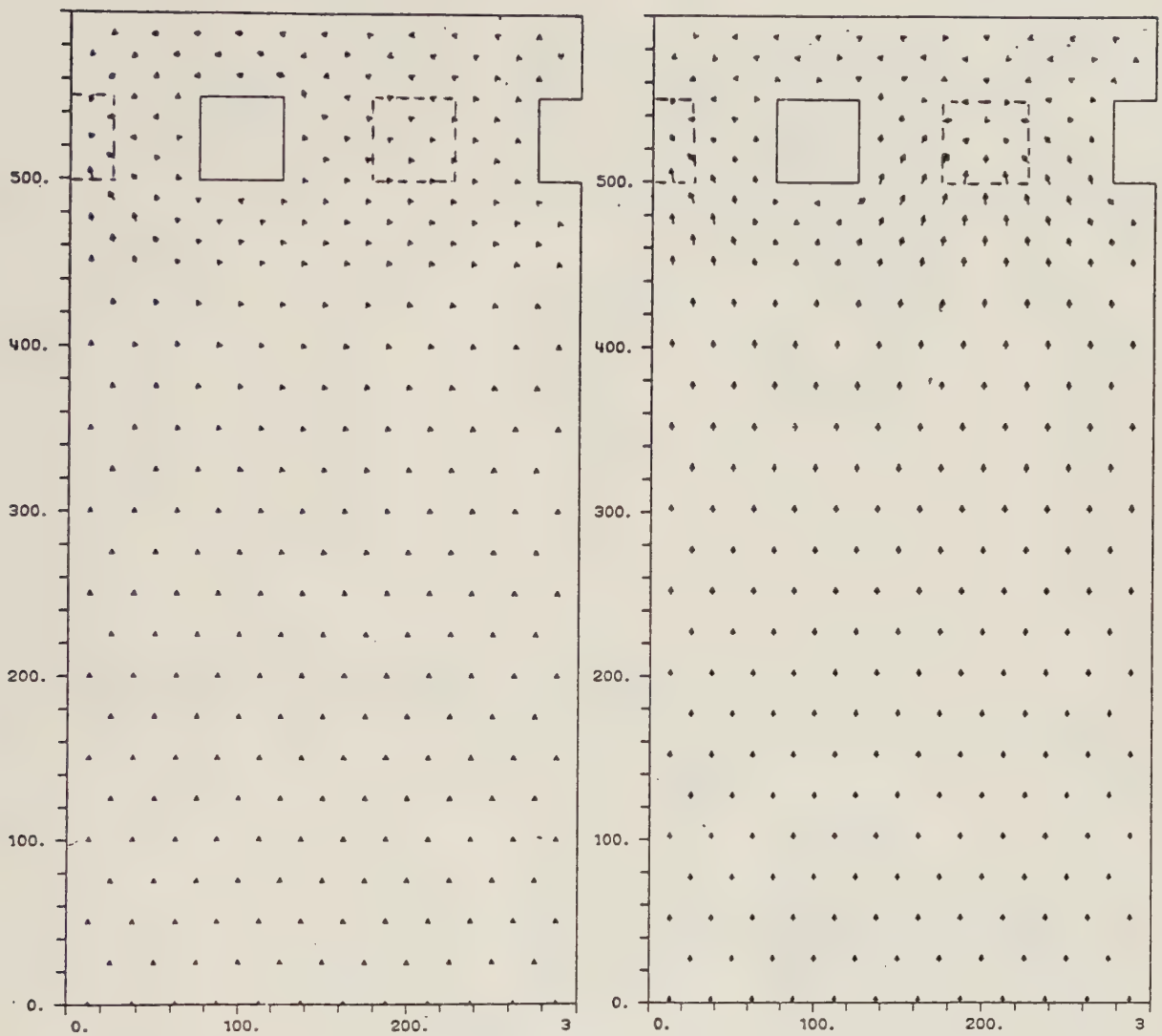
Figure VI·10



Evolution des quantités de mouvement. Maillage 2

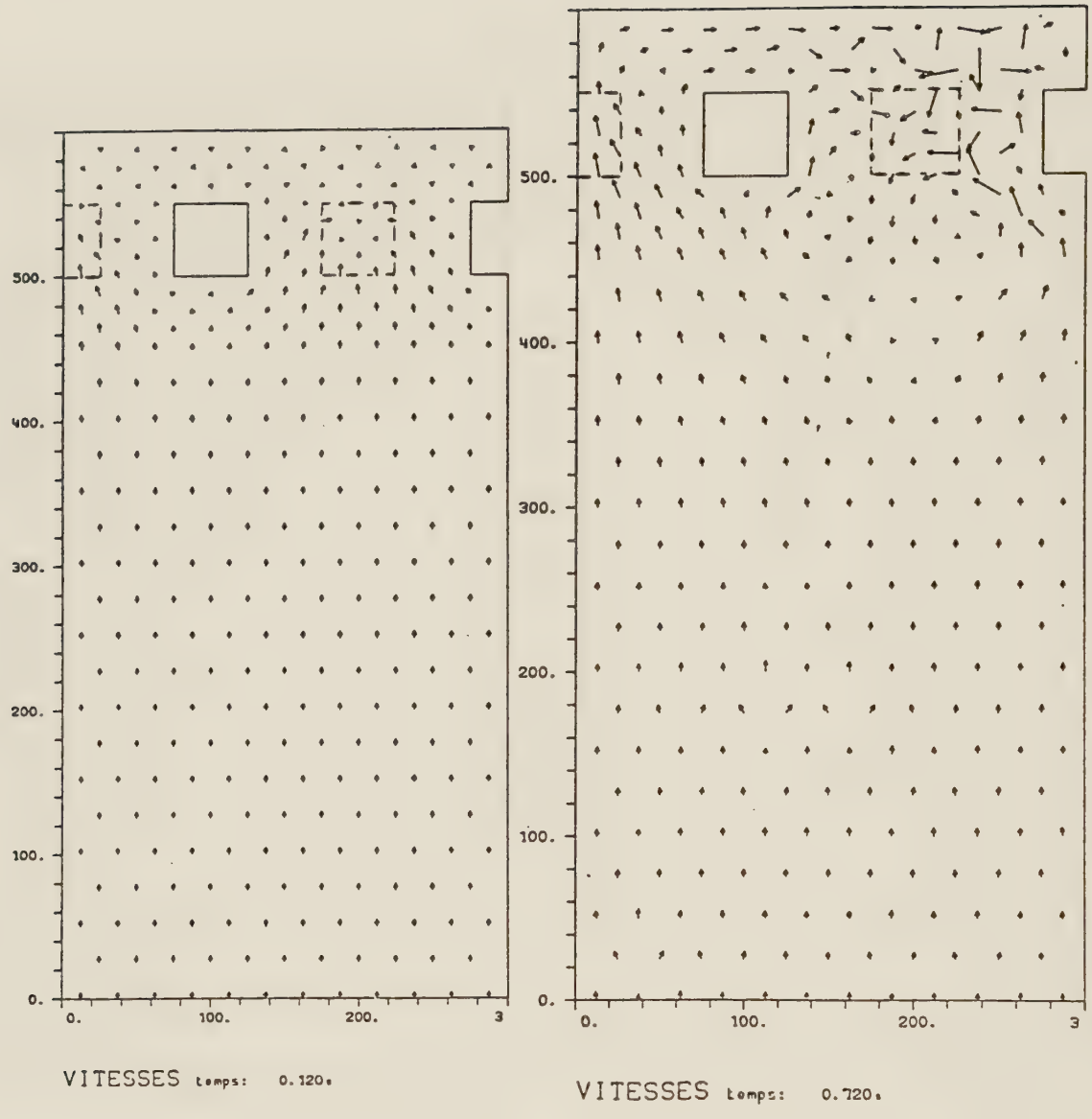
Figure VI.10

(suite)



Champs de vitesses. Maillage 2.

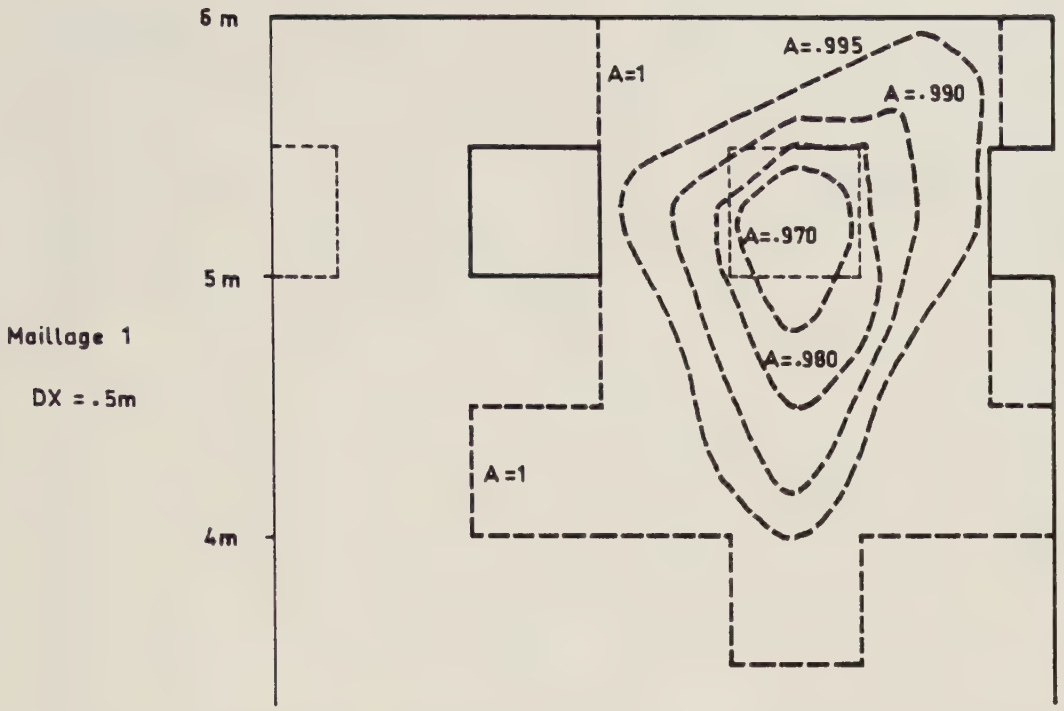
Figure VI.11



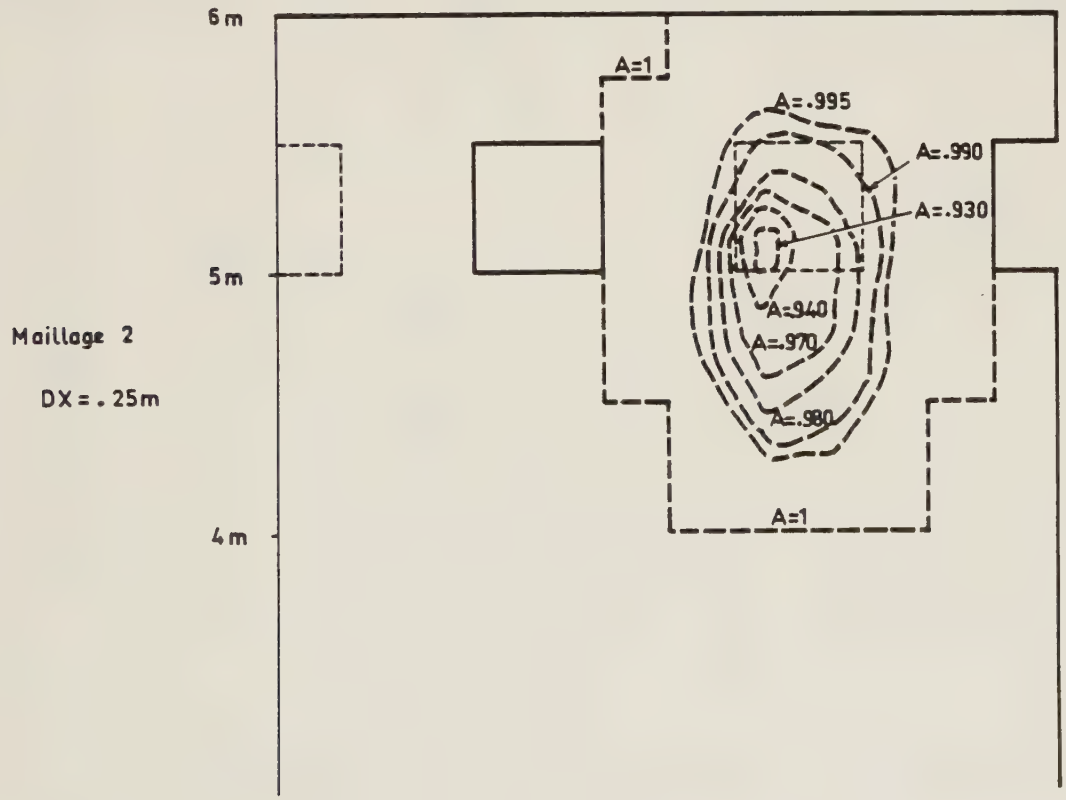
Champs de vitesses. Maillage 2.

Figure VI.11

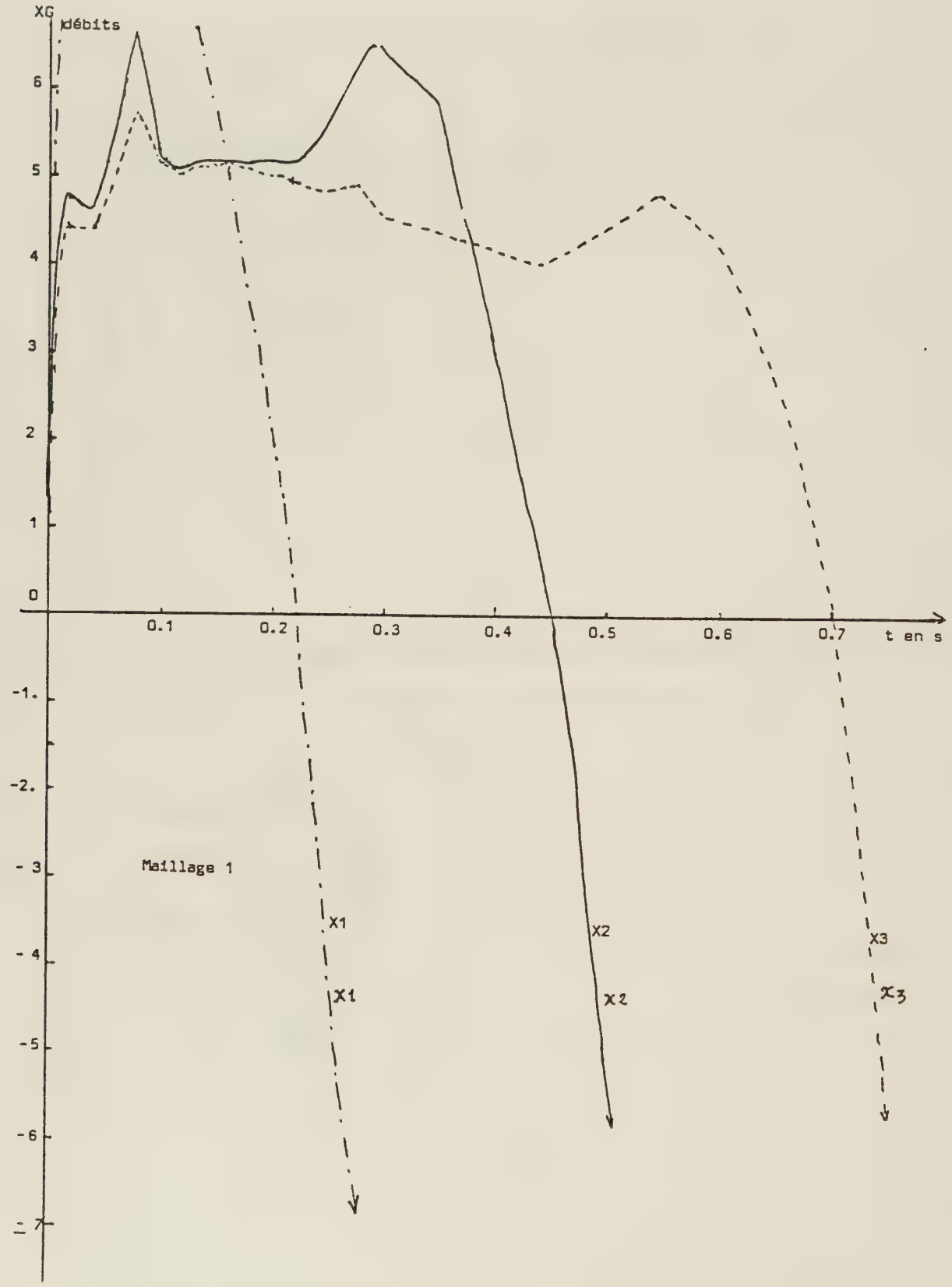
(suite)



Répartition des taux de vide autour de l'injection au temps t = 0,5 s

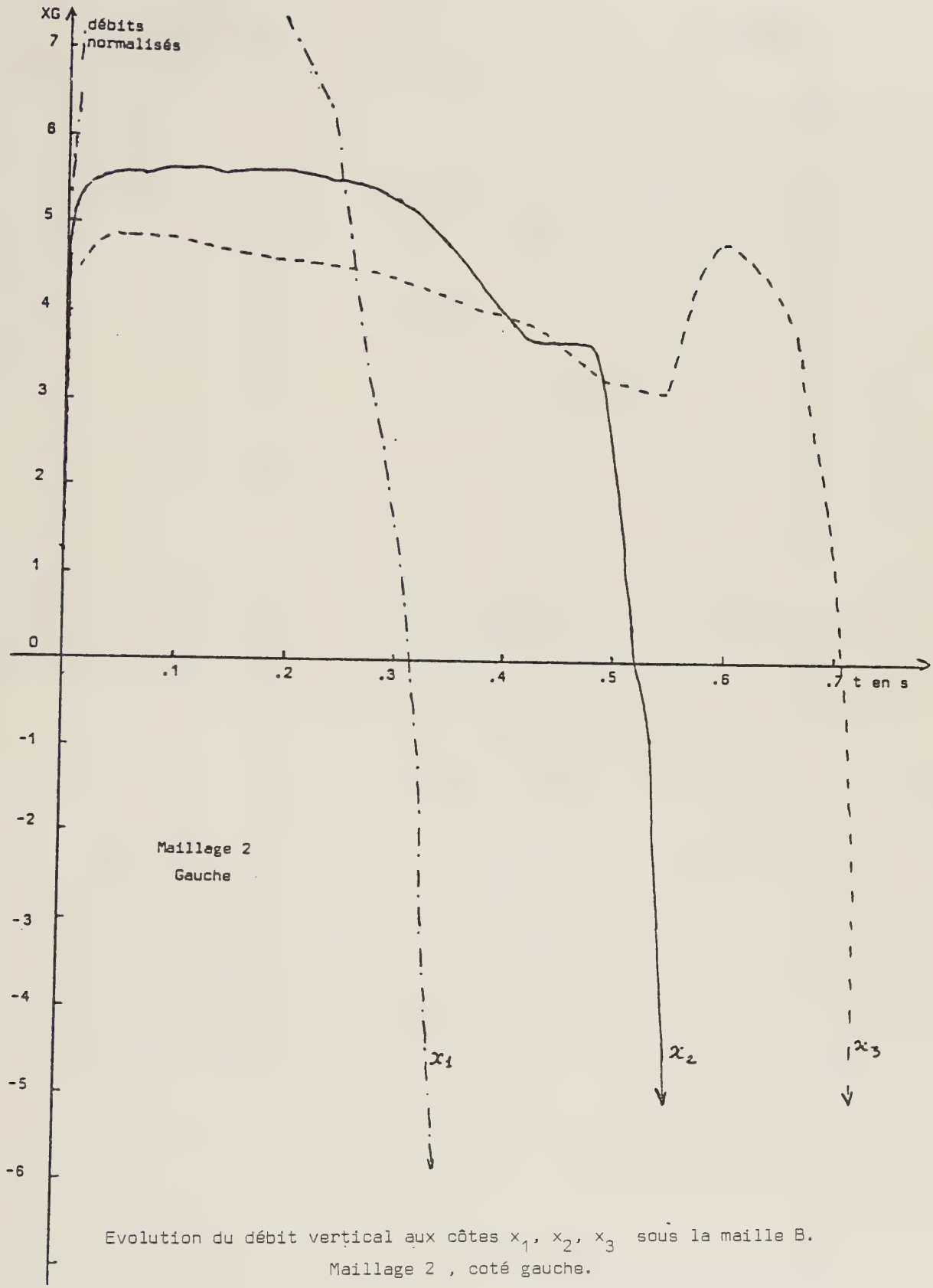


Répartition des taux de vide , t = 0.5 s
Figure VI 12



Evolution du débit vertical aux côtes x_1 , x_2, x_3 sous la maille B. Maillage 1

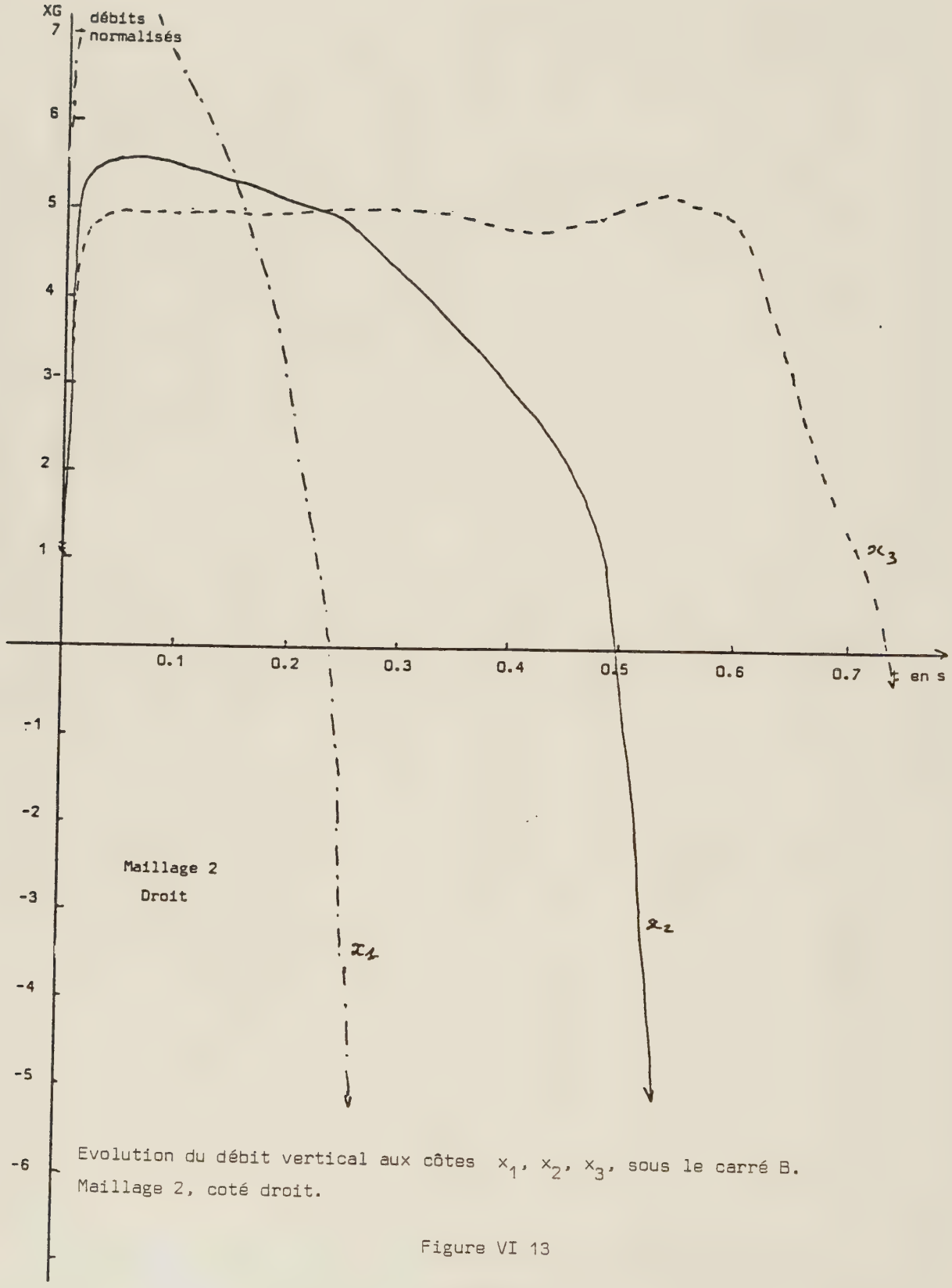
Figure VI 13



Evolution du débit vertical aux côtes x_1, x_2, x_3 sous la maille B.
Maillage 2 , coté gauche.

Figure VI 13

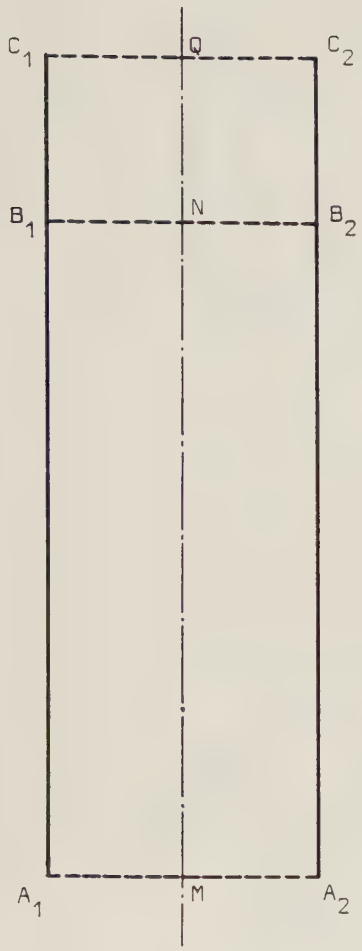
suite



Evolution du débit vertical aux côtes x_1, x_2, x_3, sous le carré B.
Maillage 2, coté droit.

Figure VI 13

suite



Géométrie : $A_1 B_1$ = 10. m
$B_1 C_1$ = 2. m
$A_1 A_2$ = 4. m

Maillage 1 : DX = DY = 2. m
12 mailles
16 inconnues vecteurs

Maillage 2 : sur $A_1A_2B_2B_1$
DX = DY = .5 m
sur $B_1B_2C_2C_1$
DX = .5m, DY = 1. m
176 mailles
330 inconnues vecteurs

Conditions limites :

$\vec{G}.\vec{n} = 0$ sur A_1C_1 et A_2C_2

Pression imposée en C_1C_2 $P = 70\ 10^5\ P_A$

Débit imposé en A_1A_2 $G = 800\ kg/m^2/s$

Enthalpie imposée en A_1A_2 $h = 1{,}268\ 10^6 J/kg$

Masse volumique d'entrée : $M \simeq 740\ kg/m^3$

Température d'entrée : $T \simeq 285°C$

Pression d'entrée : $P \simeq 72\ 10^5\ P_A$

Données physiques

Epaisseur de la plaque : $e = 6\ 10^{-2}$ m

Flux appliqué en A_1MNB_1 : $\phi_1 = 30\ W/cm^2$

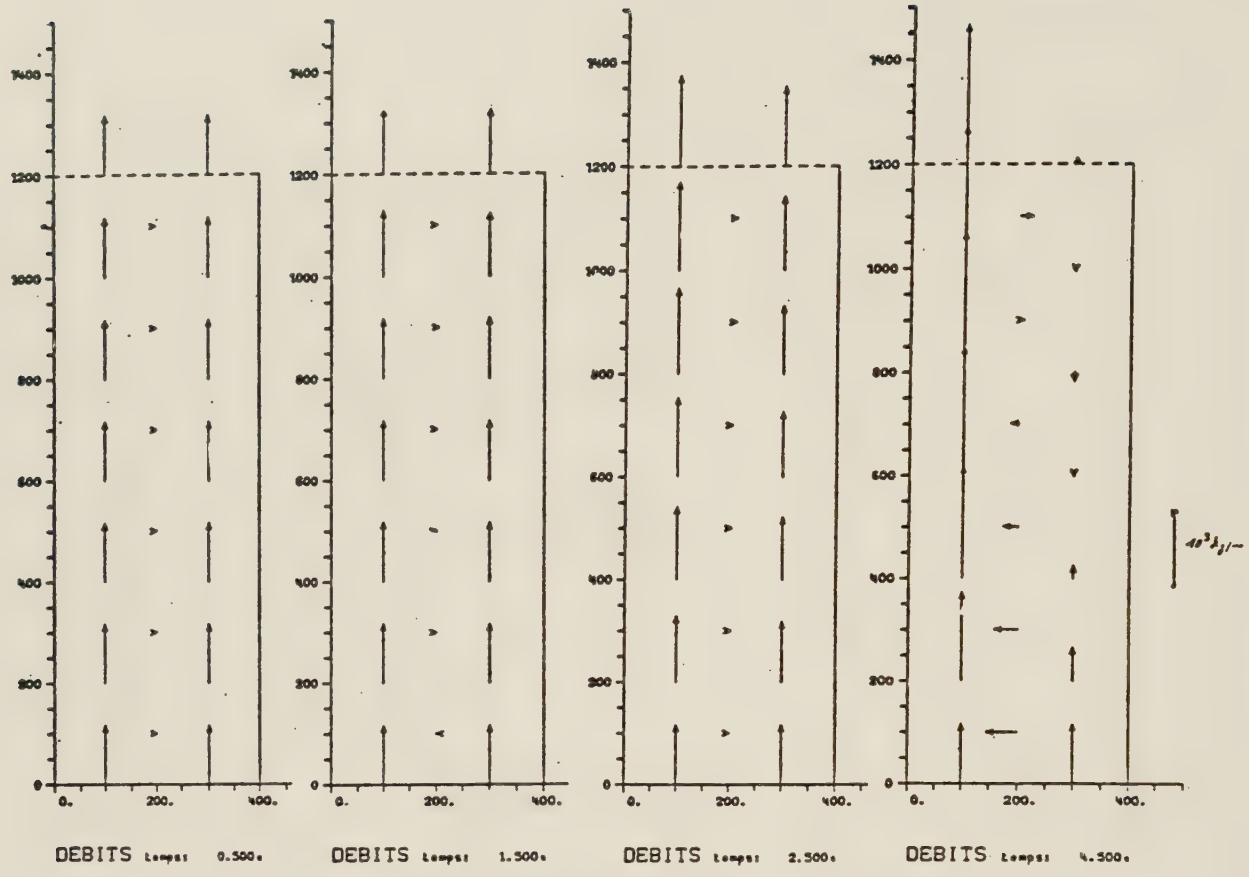
Flux appliqué en MA_2B_2N : $\phi_2 = 6\ W/cm^2$

Gravité : $g = 9{,}81\ m/s^2$

Pertes de charge appliquées tous les mètres entre 0 et 10 m.

$F = K \rho u^2$ $K = 7\ m^{-1}$

FIGURE VI.14



Evolution des débits transversaux et verticaux dans le maillage 1

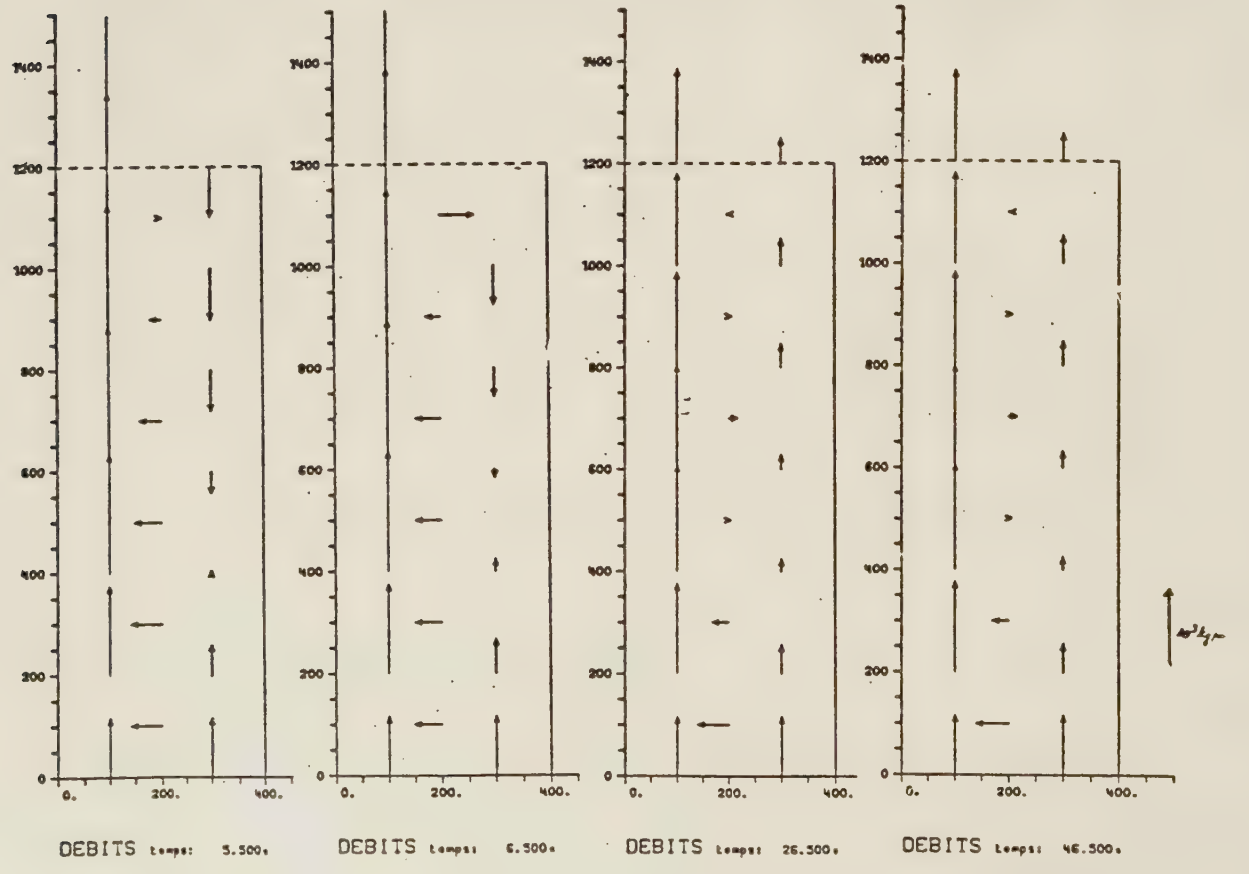
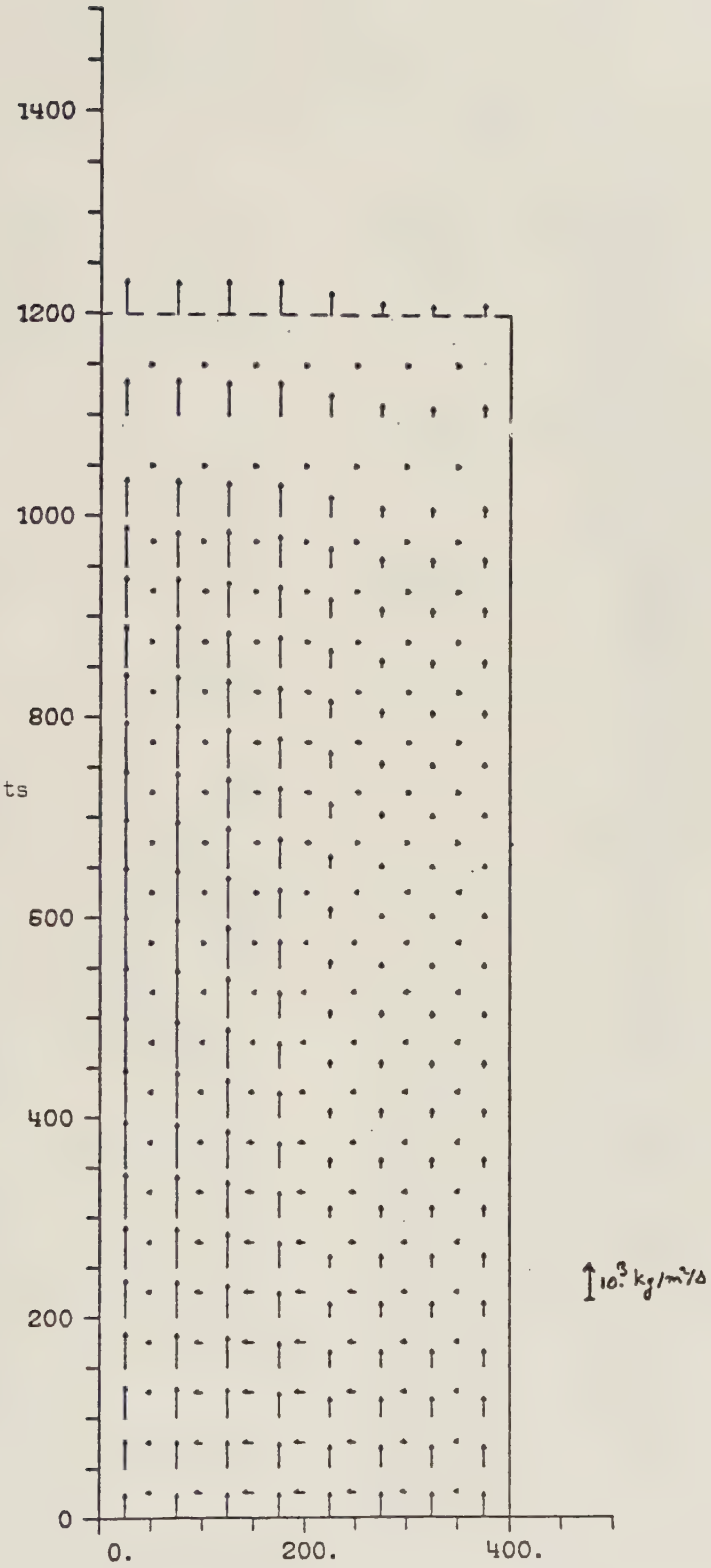


Figure VI 15

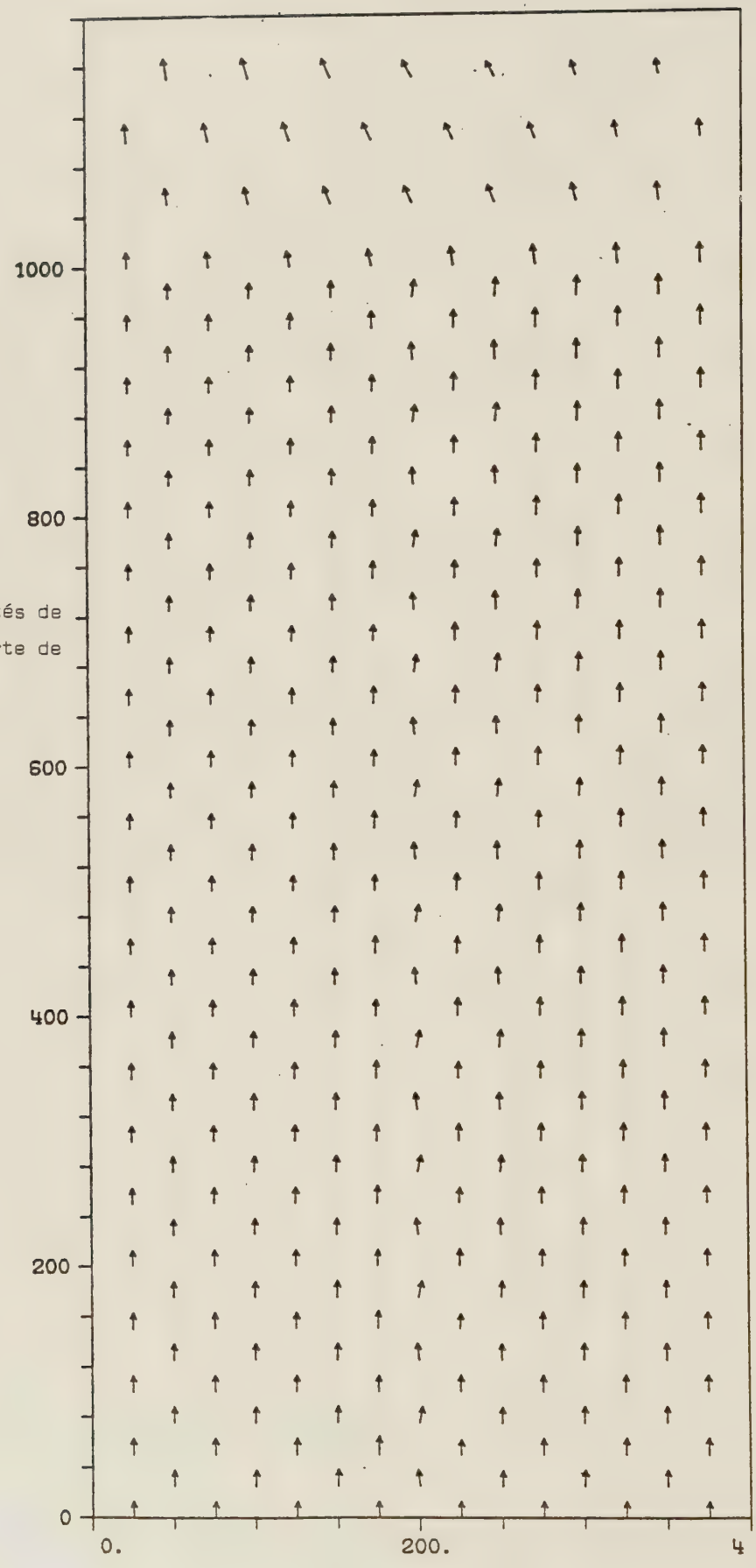
Représentation des débits traversant les mailles, écoulement libre



DEBITS temps: 5.000s

Figure VI.16

Champs des quantités de mouvement avec perte de charge.

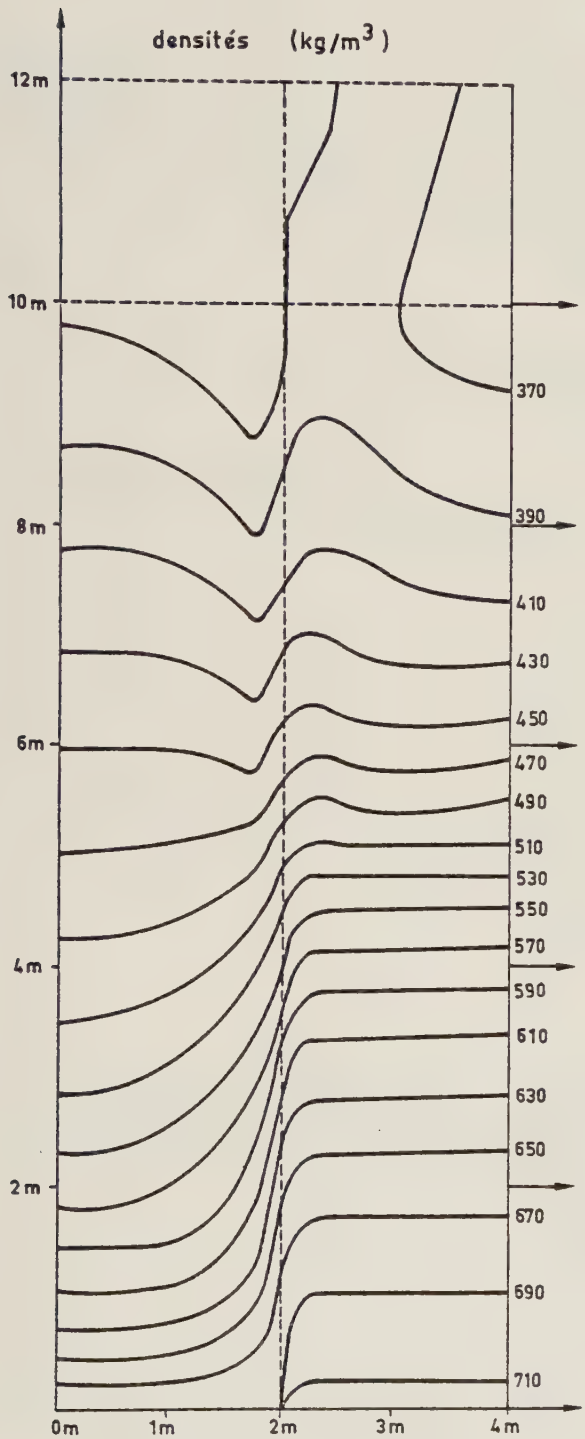


DEBITS temps: 7.700s

Figure VI.17

Répartition de la Densité (kg/m^3)

Ecoulement libre (kg/m^3)



Ecoulement $\delta P = K\rho u^2$

avec perte de charge

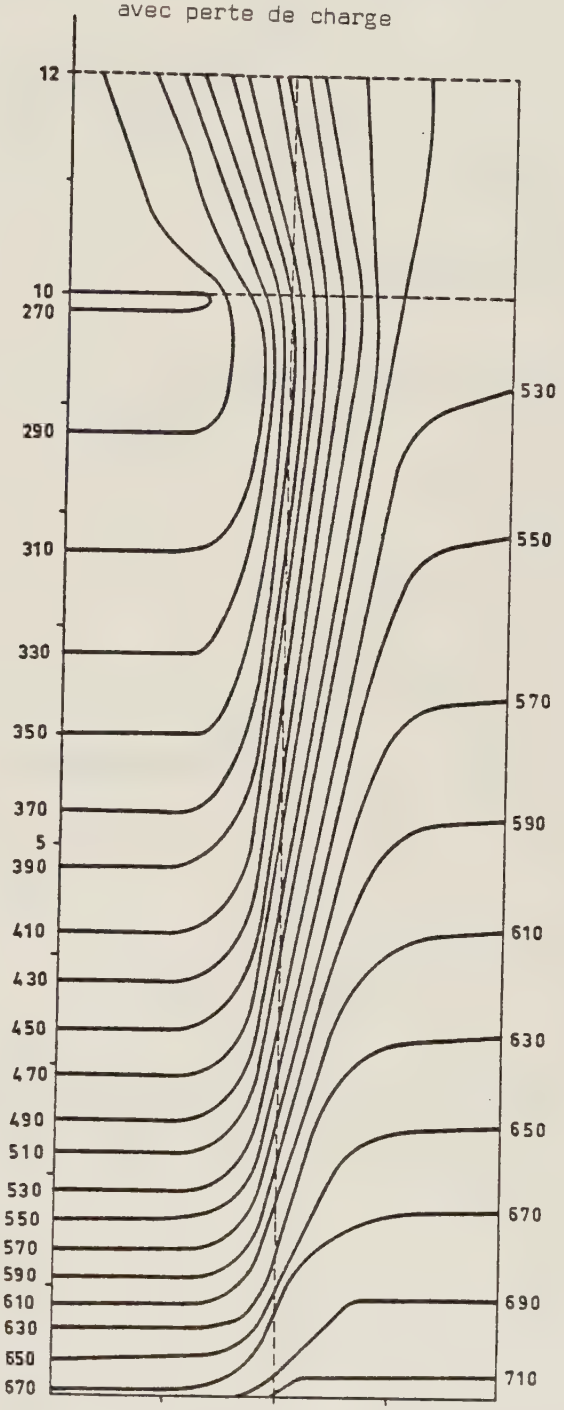
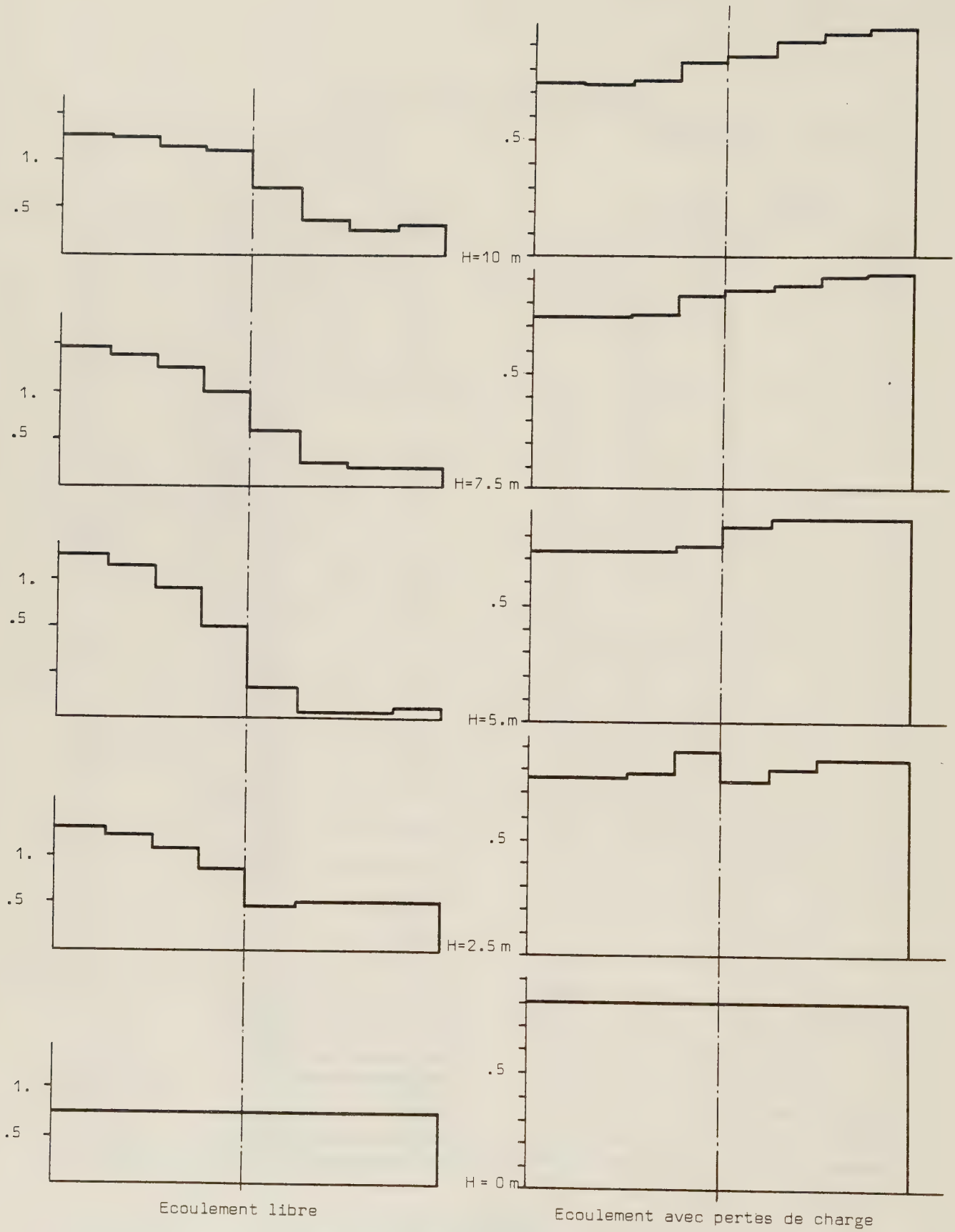


Figure VI 18



Répartition des débits verticaux sur une tranche aux cotes H=0, 2.5, 5, 7.5, 10 m
Débits en 10^3 kg/m^2/s

FIGURE VI.19

ANNEXE 1

A - *NOTATIONS* -

Les calculs sont faits dans un ouvert borné Ω de R^2, sa frontière F est "régulière".

$D(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables de Ω dans R à support compact dans Ω.

On n'aura besoin dans la suite que de la définition des dérivées premières des fonctions.

$BV(\Omega)$ est l'espace des fonctions à variations bornées dans Ω.

$L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions de Ω dans R de carré intégrable.

Dans $L^2(\Omega)$ on peut définir un produit scalaire $(u,v) = \int_\Omega u.v \, dX$ et une norme

$$||u||_{L^2} = \left(\int_\Omega u^2 \, dX\right)^{1/2}$$

$L^1(\Omega)$ est l'espace des fonctions intégrales. La norme y est $||u||_{L^1} = \int_\Omega |u| \, dX$.

$L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions bornées sur Ω. La norme dans $L^\infty(\Omega)$ est

$$||u||_{L^\infty} = \operatorname{Sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$$

$H^1(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont les dérivées partielles d'ordre 1 appartiennent à $L^2(\Omega)$. C'est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle u,v \rangle = \int_\Omega u \, v \, dX + \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} u \cdot \frac{\partial}{x_i} v \, dX$$

et de la norme :

$$||u||_{H^1} = \left[\int_\Omega u^2 \, dX + \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dX \right]^{1/2}$$

Les théorèmes d'approximation font intervenir également les semi normes

$$|u|_{1,\Omega} = \left[\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dX \right]^{1/2}$$

L'espace produit $(H^1(\Omega))^2$ des fonctions $q = (q_1, q_2)$ de Ω dans R^2 telle que chaque composante q_i appartienne à $H^1(\Omega)$, est un espace de Hilbert muni du produit scalaire.

$$(q,p) = \sum_{i=1}^{2} (q_i, p_i)_{H^1(\Omega)}$$

$H(div,\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $q = (q_1,q_2)$ de Ω dans R^2 telles que $i = 1,2$ $q_i \in L^2(\Omega)$, et la divergence de q $\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} q_i = \text{div } q$ appartienne à $L^2(\Omega)$.

C'est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire :

$$(u,v)_{div} = (u_1, v_1) + (u_2, v_2) + (\text{div } u, \text{div } v)$$

et de la norme : $$||q||_{H\ div} = \left[\sum_{i=1}^{2} ||q_i||^2_{L^2(\Omega)} + ||\text{div } q||^2_{L^2} \right]^{1/2}$$

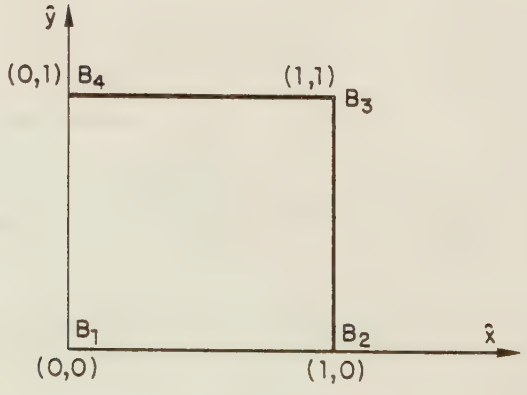
Enfin rappelons la formule de Green souvent utilisée dans le cadre d'une formulation faible des problèmes.

Si la frontière F de Ω est suffisamment régulière, on sait définir une normale extérieure à Ω. On désigne par ν le vecteur unitaire de cette normale. Les théorèmes de traces (voir THOMAS [8]) permettent de définir la trace $\gamma_o\, q$ sur F d'une fonction q de $H^1(\Omega)$, et la trace $\vec{\gamma}_\nu, \vec{v}$ sur F d'une fonction v de $H(div,\Omega)$ dans des espaces duaux sur F. Cela permet de donner un sens à la formule de Green

$$\int_\Omega (v.\text{grad } q + q \text{ div } v)\, dX = (\gamma_o\, q, \gamma_\nu\, \vec{\sigma})_F$$

Enfin, lors de la description des espaces d'interpolation on aura besoin des définitions de plusieurs espaces de polynomes définis sur le carré. Par commodité ils sont décrits ici

Carré unitaire $\hat{C}$:



On détermine sur le carré deux types d'espaces de polynomes

$$Q_k = \{q(\hat{x},\hat{y}) = a_o + \sum_{i,j=0}^{k} \alpha_{ij}\, \hat{x}^i\, \hat{y}^j \}$$ polynômes de degré k en $\hat{x}$ ou en $\hat{y}$

et $P_{k,k'}$

$$P_{k,k'} = \{p(\hat{x},\hat{y}) = a_o + \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k'} \alpha_{ij}\, \hat{x}^i\, \hat{y}^j\}$$

Sur le côté d'un élément on définit l'abscisse curviligne et l'espace S^k des polynomes de degré k en ξ

Soit K' le côté d'un élément K

$$S_k = \{s\,(\xi) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i\, \xi^i\}$$

ANNEXE 2

Démonstration de la proposition 2-1.

a) Conservation de la borne uniforme :

- Schéma explicite

Pour un élément K n'ayant pas de côté commun avec la frontière Fe :

$$\rho_K^{t+\Delta t} = \rho_K^t - \sum_{i \in I^+} (\rho_K^t - \rho_{X_i}^t) \frac{F_i}{S_K} \cdot \Delta t$$

où $F_i = \int_{C_i} \vec{u}.\vec{\nu}_i \, ds$ F_i est positif par définition, car I^+ est l'ensemble des côtés C_i où la vitesse est entrante pour l'élément K. $\vec{\nu}_i$ est la normale à C_i dans le sens de la vitesse.

On impose la condition E_1 :

(E1) $\forall K \in \mathcal{C}_h \qquad 1 - \Delta t \sum_{i \in I^+} \frac{F_i}{S_K} > 0$

S_K est l'aire de l'élément K.

Alors $\rho_K^{t+\Delta t} = \rho_K^t \left(1. - \Delta t \sum_{i \in I^+} \frac{F_i}{S_K}\right) + \sum_{i \in I^+} \Delta t \frac{F_i}{S_K} \rho_{K_i^+}^t$

Comme les coefficients de ρ_K^t et $\rho_{K_i^+}^t$ sont tous positifs, de somme égale à 1 on en déduit :

$$|\rho_K^{t+\Delta t}| \leq \text{Sup} \left[|\rho_K^t|, \sup_{i \in I^+} |\rho_{K_i^+}^t| \right]$$

On peut même en conclure un résultat de monotonie :

$$\text{Inf} \left[\rho_K^t, \inf_{i \in I^+} (\rho_{K_i^+}^t) \right] \leq \rho_K^{t+\Delta t} \leq \text{Sup} \left[\rho_K^t, \sup_{i \in I^+} (\rho_{K_i^+}^t) \right]$$

Si des éléments de Fe interviennent dans les côtés à $\in I^+$ de K on définit $\rho^t_{K_i^+}$ par

$$\rho^t_{K_i^+} \int_{C_i \cap F_e} \vec{u}.\vec{\nu}_i \, ds = \int_{C_i \cap F_e} \rho_{F_e} \cdot \vec{u}.\vec{\nu}_i \, ds$$

et on retrouve la même majoration pour $|\rho_K^{t+\Delta t}|$.

Ceci entraîne pour la borne supérieure de $|\rho^{t+\Delta t}|$ dans Ω :

$$\operatorname*{Sup}_{K \atop h} |\rho_K^{t+ t}| \leq \operatorname{Sup} \left[\operatorname*{Sup}_{K \in \mathcal{C}_h} |\rho_K^t| \, , \operatorname*{Sup}_{a \in F_e} |\rho^t_{(x)}| \right]$$

- Schéma implicite -

$$\rho_K^{t+\Delta t} = \rho_K^t - \sum_{i \in I^+} (\rho_K^{t+\Delta t} - \rho_{K_i^+}^{t+\Delta t}) \frac{F_i}{S_K} \Delta t$$

F_i, S_K, I^+, K_i^+ ont les mêmes significations que précédemment.

On trouve donc :

$$(1. + \sum_{i \in I^+} \frac{F_i}{S_K} .\Delta t) \rho_K^{t+\Delta t} = \rho_K^t + \sum_{i \in I^+} \Delta t \frac{F_i}{S_K} \rho_{K_i^+}^{t+\Delta t}$$

Tous les coefficients sont positifs, le coefficient de $\rho_K^{t+\Delta t}$ est la somme de tous les autres. On a donc :

$$|\rho_K^{t+\Delta t}| \leq \operatorname{Max} (|\rho_K^t| \, , \operatorname*{Sup}_{i \in I^+} |\rho^{t+\Delta t}_{Ki}|)$$

Si K a des côtés communs avec F_e, en procédant de la même façon que pour le schéma implicite, on montre de même :

$$|\rho_K^{t+\Delta t}| \leq \operatorname{Max} (|\rho_K^t| \, , \operatorname*{Sup}_{\substack{i \in I^+ \\ C_i \not\subset F_e}} |\rho_{K_i^+}^{t+\Delta t}| \, , \operatorname*{Sup}_{x \in \partial K \cap Fe} |\rho^{t+\Delta t}_{(x)}|)$$

A partir de là on trouve une majoration :

$$\operatorname*{Sup}_{K \in \mathcal{C}_h} |\rho_K^{t+\Delta t}| \leq \operatorname{Max} \left[\operatorname*{Sup}_{K \in \mathcal{C}_h} |\rho_K^t| \, , \operatorname*{Sup}_{x \in F_e} |\rho^{t+\Delta t}_{(x)}| \right] = R^t$$

Ceci s'obtient par un raisonnement par l'absurde :

Si il existe un élément K_j tel que $|\rho_K^{t+\Delta t}| > R^t$, alors,par les inégalités précédentes, il existe au moins un élément K_i^+ en amont de K_j tel que $|\rho_{K_i^+}^{t+\Delta t}| \geq |\rho_{K_i}^{t+\Delta t}| > R^t$.

A partir du ou des éléments K_i^t, on peut ainsi construire par récurence, l'ensemble F_{Kj} des éléments K_i^+ en amont de K_j, tels que $|\rho_{K_i^+}| > R^t$.

Alors :

- soit on peut trouver dans F_{Kj} un élément K_{j1}, tel qu'il n'y a pas d'élément en amont de K_{j1} dans K_j
  Il y a contradiction, car la valeur de ρ_{Kj1} est forcément inférieure ou égale à R_t

- soit on ne peut pas trouver cet élément K_α. Alors l'ensemble F_{Kj} étant de cardinal fini, il y a une boucle dans F_{Kj}. En vertu des inégalités, les valeurs absolues des $|\rho_K^{t+\Delta t}|$ sont toutes égales dans les éléments de la boucle. Soit F_{Kj*} l'ensemble des éléments de K_j qui ont la même valeur $\rho_K = R_j*$.

Sur un élément de F_{Kj}^*, soit I_m l'ensemble des côtés de I^+ correspondant aux éléments de F_{Kj}^*. On trouve en appliquant les formules du schéma

$$R^t < R_j^* = |\rho_K^{t+\Delta t}| \leq \text{Max} \left[\rho_K^t \, , \underset{\substack{i \in I^+ \\ i \notin Im}}{\text{Sup}} |\rho_{K_i^+}^{t+\Delta t}| \right]$$

Alors soit il n'y a pas d'élément dans $F_{Kj} - F_{Xj}^*$ tel que $|\rho_K^{t+\Delta t}| > R_j^*$ et on aboutit à une contradiction. Soit il y en a, et on fait le même raisonnement sur $F_{Kj} - F_{Kj}^*$. Comme on élimine ainsi à chaque fois au moins deux éléments pour former une boucle, le processus s'arrête après un nombre fini d'itérations.

b) Conservation de la variation bornée -

- Schéma explicite -

On considère l'ensemble des côtés C_j, intérieurs au domaine Ω, et les côtés C_{jFe} qui sont les côtés du contour polygonal F_e. Soit D_j la longueur de chaque côté, on cherche une majoration de :

$$B(t+\Delta t) = \sum_{i \in J} |\rho_{K_{K_j^+}}^{t+\Delta t} - \rho_{K_{j-}}^{t+\Delta t}| \cdot D_j + \sum_{j \in F_e} |\rho_{K_j^-}^{t+\Delta t} - \rho_{F_e}^{t+\Delta t}|$$

Sur un côté C_j, on peut toujours définir un élément K_j^+ en amont de C_j, et l'autre K_j- en aval de C_j par rapport à la vitesse.

On impose comme première condition : si U_M est la borne supérieure du module du

champ de vecteurs, que le maximum de $\frac{t \times U1 \times Di}{S_K}$ pour tous les côtés i et les éléments K qui leur sont adjacents soit inférieur ou égal à une valeur q_t constante lorsque Δt et le h en espace tendent vers zéro.

D_i est la longueur du côté i, S_K l'aire de l'élément K.

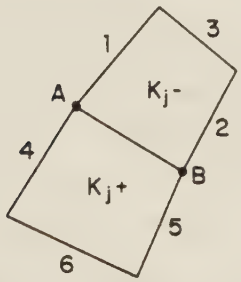
On fait ici des hypothèses sur le maillage :

Hypothèse 1 : il peut être considéré comme la transformée par un homéomorphisme d'un maillage par des rectangles. Donc un sommet du maillage est entouré de quatre éléments

Hypothèse 2 : le maillage tend uniformément vers un maillage régulier en parralélogrammes engendrés vers un maillage régulier en parrallélogrammes engendrés par des lignes parallèles et les rapports entre deux côtés qui se suivent sur une ligne, tendent à être égaux en $O(\underline{h})$

L'hypothèse 2 intervient du fait que l'on ne tiend pas compte à priori de la connaissance du champ de vecteur.

Regardons sur un dessin :



Le côté AB est le côté C_j

$K_{\overline{j}}$ est le quadrangle de côtés 1, 2, 3, AB

K^{j+} est la quadrangle des côtés 4, 5, 6, AB

Pour le côté C_j écrivons la différence

$$\rho_{K_{j-}}^{t+\Delta t} - \rho_{K_j^+}^{t+\Delta t} = \rho_{Kj-}^{t} - \rho_{K_j+}^{t} - \sum_{i \in I_{j-}^-} (\rho_{K_{j-}}^{t} - \rho_{K_{ij}-}^{t}) \frac{F_{iK^-}}{SK_j^-} \Delta t$$

$$+ \sum_{i \in I_{K_j+}^-} (\rho_{K_j^+}^{t} - \rho_{K_{ij-}}^{t}) \frac{F_{iK^+}}{SK_j^+} \Delta t$$

Supposons par exemple que le côté 1 soit un côté entrant. Alors par la régularité de $u_{(x)}$, et les hypothèses faites sur le maillage, soit le côté 2 est sortant, soit la composante normale de la vitesse sur les côtés 1 et 2 est en O(h). $|\vec{u}.\vec{\nu}| < \gamma \cdot h$, où γ est la constante de Lipschitz sur le côté 1 = $\frac{\Delta+ F1}{S_{Kj}} (\rho_{Kj-} - \rho_{Kj+})$ où K_1^+ est l'élément en amont du côté 1.

De plus, dans la somme sur les côtés amonts de K_j, il y a le côté AB, avec la somme $\frac{\Delta t\, F_0}{S_{Kj-}} (\rho_{Kj-} - \rho_{Kj+})$.

Enfin, par continuité de la vitesse $\vec{u}$, soit la vitesse $\vec{u}$ entre dans K_j^+ par le côté 4, soit les composantes normales de la vitesse aux côtés 4, 5, 1 et 2 sont en O(h). En tenant compte du fait que les rapports $\frac{\Delta t.Di}{S_K}$ sont inférieurs ou égaux à τ/U_M, si la vitesse est en O(h) sur un côté, la quantité $\frac{\Delta t\ Fi}{S_K}$ correspondant à ce côté est en O(h), inférieure à C'h où C est une constante inférieure ou égale à $\tau/Um \times \gamma$. On trouve alors, que pour l'exemple invoqué :

$$\rho_{K_{j-}}^{t+\Delta t} - \rho_{K_{j+}}^{t+\Delta t} = (\rho_{K_{j-}}^{t} - \rho_{K_{j+}}) \times \left(1. - \Delta t \frac{F_0}{S_{K_{j-}}} - \Delta t \frac{F_1}{S_{K_{j-}}}\right)$$

$$+ \frac{\Delta t\ F_4}{S_{K_{j+}}} \times (\rho_{K_{j+}}^{t} - \rho_{K_{4+}}^{t}) + (\rho_{K_{j-}}^{t} - \rho_{K_{j+}}^{t}) \cdot \frac{\Delta t\ F_1}{S_{Kj-}} - (\rho_{K_{j-}}^{t} - \rho_{K_{1+}}^{t}) \frac{\Delta t\ F_1}{S_{Kj-}}$$

$$+ \frac{\Delta t\ F_6}{S_{K_{j+}}} (\rho_{K_{j+}}^{t} - \rho_{K_{6+}}^{t}) + A$$

A est en module inférieur ou égal à :

$$h \times C \times \left(|\rho_{K_{j-}} - \rho_{K_{3+}}| + |\rho_{K_{j-}} - \rho_{K_{2+}}| + |\rho_{K_{j+}} - \rho_{K_{3+}}| \right)$$

On veut ensuite regrouper les termes de la seconde ligne pour faire apparaître la différence $(\rho_{K_{1+}} - \rho_{K_{4+}})$.

Pour cela, il faut que :

$$\Delta t \frac{F_4}{S_{K_{j+}}} = \Delta t \frac{\int_{C4} \vec{u}.\vec{\nu}\ 4\ ds}{S_{K_{j+}}} = \frac{\Delta t\ F_1}{S_{K_{j-}}} + C'.h$$

$$= \Delta t \frac{\int_{C1} \vec{u}.\vec{\nu}1\ ds}{S_{K_{j-}}} + C' . h$$

Si on ne connait pas à priori la direction de la vitesse u, on voit qu'un moyen pour vérifier cette relation est que les éléments $S_{K_{j-}}$ et $S_{K_{j+}}$ soient presque des parrallélogrammes et que les côtés C_1 et C_4 soient alignés. Alors :

$$S_{K_{j+}} = \alpha_i \times D_4 \times D_{AB}$$

$$S_{K_{j-}} = \alpha_i\ (1 + O(h)) \times D_1 \times D_{AB}$$

et $$\int_{C4} \vec{u}.\vec{\nu}_4 \, ds = D_4 \times |\vec{u}_A| + O(h) \times D_4$$

$$\int_{C1} \vec{u}.\vec{\nu}_1 \, ds = D_1 + |u_A| + O(h) \times D_1$$

$$\int_{C4} \frac{\vec{u}.\vec{\nu}_4 \, ds}{S_{K_{j+}}} = \frac{|u_A|}{\alpha_i \, D_{AB}} + \frac{O(h)}{\alpha_i \, D_{AB}}$$

$$\int_{C1} \frac{\vec{u}.\vec{\nu}_1 \, ds}{S_{Kj-}} = \frac{|u_A|}{\alpha_i \, D_{AB}} + \frac{O'(h)}{\alpha_i \, D_{AB}}$$

Donc si D_{AB} reste supérieur à k x h où h est le pas de la discrétisation, le rapport $\frac{O(k)}{\alpha_i \, D_{AB}}$ reste inférieur à un rapport K constant sur tout le domaine. On a donc supposé ici que les angles des parallélogrammes restent supérieurs à θ, et qu'entre deux éléments voisins le rapport entre leurs angles tend vers 1 en O(h) uniformément sur tout le domaine.

Dans ces conditions on trouve :

$$\rho_{K_j}^{t+\Delta t} - \rho_{K_{j+}}^{t+\Delta t} = (\rho_{K_{j-}}^{t} - \rho_{K_{j+}}^{t}) \times (1. - \Delta t \frac{F_0}{SK_{j-}} - \Delta t \frac{F_1}{SK_{j-}})$$

$$+ (\frac{\Delta t \, F_1}{S_{K_{j-}}} + C'\Delta t) \cdot (\rho_{K_{1+}} - \rho_{K_{4+}}) + \frac{\Delta t \, F_6}{S_{K_{j+}}} (\rho_{K_{j+}} - \rho_{K_6})$$

$$+ A$$

Sous la condition de stabilité, le coefficient du premier terme est positif, on peut passer aux valeurs absolues :

$$|\rho_{K_{j-}}^{t+\Delta t} - \rho_{K_{j+}}^{t+\Delta t}| \leq |\rho_{K_j}^{t} - \rho_{K_{j+}}^{t}| \times (1. - \Delta t \frac{F_1}{S_{K_{j-}}} - \frac{\Delta t \, F_1}{S_{K_{j-}}})$$

$$+ (\frac{\Delta t \, F_1}{S_{K_{j-}}} + C' \, \Delta t) \, |\rho K_{1+} - \rho K_{4+}| + \frac{\Delta t \, F_6}{S_{K_{j+}}} \, |\rho_{K_{j+}} - \rho_{K_{6+}}|$$

$$+ \quad A$$

Si on se trouve sur un côté de la frontière, on fait de plus l'hypothèse que la vitesse u est normale à Fe. Dans ces conditions l'intégrale de u. sur les côtés 1 et 2 est en O(h). On trouve alors sur le côté frontière

$$|\rho^{t+\Delta t}_{K-} - \rho^{t+\Delta t}_{K_{Fe}}| \leq |\rho^{t}_{K-} - \rho^{t}_{K\ F_e}| \quad \times \left(1. - \frac{\Delta t\ F_0}{S_{K-}}\right) + \left|\frac{\partial p}{\partial t}/F_e\right| . \Delta t \times D_K\ F_e$$

où $D_K\ F_e$ est la longueur du côté frontière.

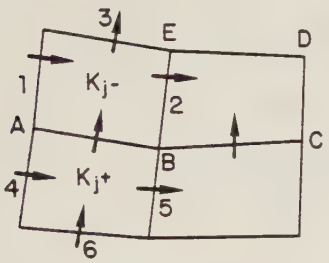
On forme maintenant, la somme sur tous les côtés C_i du maillage des quantités $D_i \times |\rho_{K_{i+}} - \rho_{K_{i-}}|$. On obtient en facteur des sauts de ρ sur chaque côté des termes de signe opposés.

Par exemple reprenons la figure :

L'inégalité sur le côté AB donne :

$$|\rho K^t_{j-} - \rho K^t_{j+}| \times (D_{AB} - \Delta t \frac{F_0}{S_{K_{j-}}} D_{AB} - \Delta t \frac{F_1}{S_{K_{j-}}} D_{AB})$$

Comme on a supposé que la vitesse entre par le côté 1, à moins de composantes en $O(h)$, seul le côté BC suivant de AB dans le courant va donner une contribution, ainsi que le côté S.



BC donne $\Delta t \frac{F_2}{S_{BCDE}} . D_{BC} |\rho^t_{K_{j-}} - \rho^t_{K_{j+}}|$

3 donne $\Delta t \frac{F_0}{S_{K_{j-}}} . D_3 |\rho^t_{K_{j-}} - \rho^t_{K_{j+}}|$

On a besoin de relations de régularités supplémentaires puisqu'on veut pouvoir écrire :

$$\Delta t \frac{F_2}{S_{BCDE}} \times D_{BC} = \Delta t \frac{F_1}{S_{K_{j-}}} \times D_{AB} + O(\Delta t) . D_{AB}$$

et $$\Delta t \frac{F_0}{S_{K_{j-}}} . D_3 = \Delta t \frac{F_0}{S_{K_j}} . D_{AB} + O(\Delta t) . D_{AB}$$

Il faut donc naturellement que les rapports entre deux côtés qui se suivent tendent vers 1. Mais il faut en plus que ce soit en $O(h)$. En effet la condition impose que l'on doit avoir :

$$\left|\frac{F_2}{S_{BCDE}} - \frac{F_1}{S_{K_{j-}}}\right| < C^{(1)} \quad \text{de même :}$$

de même $$\left|\frac{F_0}{S_{K_{j-}}} - \frac{F_0}{S_{K_{j-}}}\right| < C^{(1)}$$

Comme les rapports entre D_1 et D_2 tendent vers 1, que l'on tend vers des parallélogrammes, il faut comparer :

$$\left| \frac{1}{D_{BC}} - \frac{1}{D_{AB}} \right| \leq C^*$$

Cela donne que le rapport des longueurs de 2 côtés qui se suivent tend vers 1 en O(h) uniformément sur le domaine.

L'hypothèse 2 permet de vérifier ces conditions. L'utilisation des éléments finis est donc restreinte si l'on veut satisfaire la condition de variations bornées. On tombe sur des maillages très réguliers, pour des domaines ayant des bords parallèles.

Le nombre de voisins d'un côté étant limité à 7, la somme sur tous les côtés C_i du maillage, incluant les côtés de la frontière où la vitesse entre, au temps n+1 donne

$$\sum_{C_i} D_i \times \left| \rho_{Kj}^{t+\Delta t} - \rho_{Kj+}^{t+\Delta t} \right| \leq \sum_{C_i} D_i \left| \rho_{Kj-}^{t} - \rho_{Kj+}^{t} \right| \times (1. + C^* \Delta t)$$

$$+ \sum_{C_i F_e} D_{KF_e} \left| \rho_{K-} - \rho_{KFe}^{t} \right| + \sum_{C_i F_e} \left| \rho_{Kj-}^{t} - \rho_{KFe}^{t} \right| \times (1 + C^* \Delta t)$$

$$+ \sum_{C_i F_e} D_{XFe} \cdot \left| \frac{\rho p_{Fe}}{\partial t} \right| . \Delta t$$

On peut donc écrire :

$$B(t+\Delta v) \leq B(t) (1 + C^* \Delta t) + L_{Fe} \cdot \operatorname*{Sup}_{Fe} \left| \frac{\partial \rho Fe}{t} \right| . \Delta t$$

C^* est une constante indépendante du pas. Fe est l'entrée du domaine, L_{Fe} sa longueur. Le $\operatorname*{Sup}_{Fe} \left| \frac{\partial \rho Fe}{t} \right|$ est supposé borné sur le temps [0,T].

On peut appliquer le lemme de Gronwall à la fonction B(t). On trouve donc que B(t) reste inférieur à une fonction C(t), croissante et bornée sur l'intervalle de temps [0,T] indépendante du maillage.

- Schéma implicite -

La démonstration dans le cas implicite fait appel aux mêmes restrictions sur le maillage. On n'a pas besoin de la condition de stabilité, mais il faut quand même, qu'il existe une constante β, telle que $\Delta t \leq \beta h$ où Δt est le pas en temps et h le pas en espace.

C) Variation bornée en temps -

- Schéma explicite -

On a pour chaque élément K .

$$S_K(\rho_K^{t+\Delta t} - \rho_K^t) = - \sum_{i \in I^+} (\rho_K^t - \rho_{K_{i+}}^t) \cdot Fi \times \Delta t$$

Si on fait la somme de tous ces termes, sur tous les éléments on obtient :

$$\sum_{K \in \mathcal{C}_h} S_K \, |\rho_K^{t+\Delta t} - \rho_K^t| \leq \sum_{Cj} Fi.\Delta t \, |\rho_{K_{j-}}^t - \rho_{K_{j+}}^t| + \sum_{Fe} F_e \, \Delta t \, |\rho_K^t - \rho_{Fe}^t|$$

Comma la vitesse est lyzochtzienne sur un ouvert borné Ω de R^2, U_M est la borne supérieure finie du module de $\vec{U}$. On obtient alors :

$$\sum_{K \in \mathcal{C}_h} S_K \cdot |\rho_K^{t+\Delta t} - \rho_K^t| \leq \Delta t \cdot U_M \times B(t)$$

- Schéma implicite -

On obtient de la même façon pour le schéma implicite

$$\sum_{K \in \mathcal{C}_K} S_K \times |\rho_K^{t+\Delta t} - \rho_K^t| \leq \Delta t \times U_M \times B(t+\Delta t)$$

D) Passage à la limite -

On suit maintenant la première partie de la démonstration de Mr. LEROUX. On construit, à partir des valeurs de $\rho_k(x,t,)$ une fonction v_h interpolée linéaire de ρ_h dans $\Omega \times]\,0,T\,[$. v_h est interpolée aux sommets du maillage, de façon à ce que son intégrale soit la même que celle de ρ_h. Donc v_h appartient à $w^{1.1}(\Omega \times]\,0,T\,[\,)$ espace des fonctions appartenant à $L^1(\Omega')$ et dont les dérivées d'ordre 1 appartiennent à $L^1(\Omega')$

D'après la première inégalité on trouve déjà que (v_h) reste bornée dans $L^\infty(\Omega \times]\,0,T\,[)$. Donc on peut en extraire une sous suite convergent faiblement dans $L^\infty(\Omega \times]\,0,T\,[)$. On vérifie ensuite que v_h appartient à un borné de $w^{1.1}(\Omega \times]\,0,T[)$. En effet les deux inégalités portants sur les variations de φ_h permettent d'affirmer que les intégrales

$$\iint_{\Omega \times]\,0,T\,[} \left|\frac{\partial v_h}{\partial t}\right| dx\, dt = \sum_{n=1}^{N} \int_\Omega S_K \left| v_k^{t+n\Delta t} - v_K^{t+(n-1)\Delta t} \right| dX \quad \text{et}$$

et $\iint_{\Omega \times]0,T[} \left| \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \right| dx\, dt$ restent bornées.

Ensuite en suivant la démonstration de Mr. LEROUX, on en conclu que la suite v_h tend fortement vers une limite v_o dans $L^1_{LOC}(\Omega')$, que la différence dans la norme L_1 est $|v_h - v_o|_{L_1(\Omega')} \leqslant$ cte x h et que v_o est solution faible du problème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. FRANCOIS - DARROZES
Coups de mécanique des fluides incompressibles. ENSTA

[2] P. CARRIERE
Thermodynamique et dynamique des gaz Cours ENSTA

[3] CIARLET
The finite element method for elliptic problems
Amsterdam/New-York/Oxford Narth Holland 78

[4] CIARLET
Numerical analysis of the finite element method
Presses de l'université

[5] LIONS
Cours d'analyse numérique à l'Ecole Polytechnique

[6] CIARLET - RAVIART
Mathematical aspects of finite elements method in partial differential equations
pp. 125-145 Academic Press New York 1974

[7] RAVIART - THOMAS
A mixed finite element method of 2nd Order elliptic problem.
Communication PARIS VI

[8] J.M. THOMAS
Sur l'analyse numérique des méthodes d'éléments finis hybrides et mixtes
Thèse Paris VI 27 Mai 1977

[9] TEMAM
Theory and numerical analysis of Navier Stokes equations
North Holland 77

[10] GIRAUD - RAVIART
Finite elements approximation of the Navier Stokes Equation .
Lecture Notes in Mathematics 749 Springer & Verla

/11/ RAVIART
Exposé fait au GAMNI sur les méthodes d'éléments finis

/12/ C. JOHNSON
A mixed finite element method for Navier-Stokes Equations p335-348 RAIRO Analyse numérique Vol. 12 n° 4. 78

/13/ FORTIN
Résolution des équations de Navier-Stokes par les éléments finis de type mixte
Rapport recherche 184 JRIA Août 76

/14/ DUDAY
Rapport interne

/15/ RASMUNSSEN
A review of the variational applications in compressible flow applications

/16/ HABASHI
A study of the finite element method for aerodynamic application.
Thèse à Carnell University

/17/ GLOWINSKI-PIRONNEAU
Calcul d'écoulement transonique par des éléments finis et des méthodes de contrôle optionnel Computing Methods in applied Sciences and Engineering Vol. 134
Springer 1976 p 276-291

/18/ BRISTEAU
Application of the finite element method to transonic flow problems using a optional control approach. Lecture series. V. Karmon Institute Compütational. Fluid Dynamics March 13. 1978

/19/ LESAINT
Sur la résolution des systèmes hyperboliques du premier ordre par des éléments finis
Rapport CEA - Thèse PARIS VI

/20/ PINI
Méthode numérique pour des systèmes hyperboliques linéaires avec des conditions aux limites non linéaires. Journées éléments finis - Rennes Mai 77

/21/ LEROUX
Approximation de quelques problèmes hyperboliques non linéaires.
Thèse Rennes Avril 1979

/22/ OVADIA LEGRAND
Code Eulérien d'hydrodynamique CEE Rapport CEA

/-23-/ RAVIART OVADIA
Nouvelles méthodes numériques pour les traitements de la convection
Rapport CEA Limeil

/-24-/ G.A. SOD
Review A survey of Several finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws J. of Cõmp. Phys.
27 n° 1 (1978) 1-31

/-25-/ BRAM Van LEER
Towards The ultimate Conservative Difference Scheme IV. A new Approach to numerical Convection J. of. Comp. Physics 23 n° 3 (1977) 276-299

/-26-/ S.K. GODUNOV
Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. Mathematicheskü Sbornik 47 n° 3 (1959)

/-27-/ BREZZI
On the existence, uniqueness and approximations of the Saddle point problems arising from Lagrangian multipliers.
RAIRO analyse numérique
Août 1974 R2 p 129 à 151

/-28-/ S.N. KRUZKOV
Generalized solutions of the Cauchy problem in the Large for non linear equations of first order
Soviet. Math. Doth Vol. 10 (1969) n) 4

/-29-/ TAI PING LIU
Uniqueness of Weak solutions of the Cauchy Problem for General 2x2 conservation laws
J. of Differential Equation 20 369-389 (1976)

The Entropy Cõndition and the Admissibility of Shoks
J. of Diff. Eq. 53 78 88 (1976)

The Rieman Problem for General Systems of Conservation Laws
J. of Diff. Eq. 18 218-234 (1975)

/-30-/ G. LECOQ, M. LIBMAN, P. RAYMOND, Y. SOUCHET, J.P. SURSOCK
The triton computer code finite difference methods for on dimensioned simple or two fluid. Flow Transient computation Communication E.N.S. Munich 1981

/-31-/ J.A. ESSER
Time dependent methods for mixed and hybrid steady flows
Von Karman Institute Lecture series 1978-4